RUNGE'SCHE APPROXIMATION DURCH ÄQUIVALENTE FUNKTIONEN AUF HOLOMORPHEN FAMILIEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN

Claus Correll

1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546017_0064

RUNGE'SCHE APPROXIMATION DURCH ÄQUIVALENTE FUNKTIONEN AUF HOLOMORPHEN FAMILIEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Claus Correll
aus München

19. Juli 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof.Dr.Karl Stein
2. Berichterstatter: Prof.Dr.Konrad Königsberger

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1972

DISSERTATIONS – und FOTODRUCK FRANK oHG
8000 München 2 · Gabelsbergerstr. 15 · Tel.: 2 80 90 90

INHALT

I.	Einleitung	1
II.	Zusammenstellung benötigter Definitionen und Sätze	4
III.	Der Hauptsatz	25
IV.	Anhang	51
V.	Literatur	68

I. EINLEITUNG

In einer Veröffentlichung [19] [1] aus dem Jahre 1966 behandelte Stein die Frage, wann eine meromorphe Funktion f von einer oder mehreren komplexen Veränderlichen zu einer meromorphen Funktion "äquivalent" ist, die von einer ihrer Veränderlichen rational abhängt, d.h. wann sich f in eine derartige Funktion durch eine Variablensubstitution transformieren läßt. Zum globalen Aspekt dieses Problems beweist Stein im Einzelnen folgenden Satz:

Es seien $\bar{\mathbb{C}}$ die kompaktifizierte komplexe Zahlenebene, M eine komplexe Mannigfaltigkeit, $p : \bar{\mathbb{C}} \times M \to M$ die Projektion, W ein Gebiet in $\bar{\mathbb{C}}$, W_o und M_o relativ kompakte Teilgebiete von W bzw. M, $f : W \times M \to \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, $f_o := f \mid W \times M_o$. Auf Rand $(W_o) \times \overline{M_o}$ habe f keinen Pol und keine Unbestimmtheitsstelle, und für jeden Punkt $(w,t) \in$ Rand $(W_o) \times \overline{M_o}$ sei $\partial f/\partial w\,(w,t) \neq 0$.
Dann existieren injektive holomorphe Abbildungen $g_i : W_o \times M_o \to W \times M_o$ $(i = 1,2,\ldots)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Die g_i sind fasertreu, d.h. $(p \mid W \times M_o) \cdot g_i = p \mid W_o \times M_o$.
2) Die Folge der g_i, $i=1,2,\ldots$, konvergiert kompakt gegen die Inklusion $W_o \times M_o \to W \times M_o$.
3) Die meromorphen Funktionen $f_o \cdot g_i : W_o \times M_o \to \bar{\mathbb{C}}$

---

[1] Ziffern in eckigen Klammern sind Verweise auf die Literaturliste.

sind Beschränkungen meromorpher Funktionen $h_i : \bar{\mathbb{C}} \times M_o \to \bar{\mathbb{C}}$.

Für die Familie $p : \bar{\mathbb{C}} \times M \to M$ Riemannscher Zahlensphären gilt also ein spezieller Approximationssatz; und zwar ist $f_o \in \mathcal{M}(W_o \times M_o)$ in jedem kompakten Teil von $W_o \times M_o$ gleichmäßig approximierbar durch äquivalente meromorphe Funktionen $h_i \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}} \times M_o)$. Gegenstand dieser Arbeit ist eine analoge Aussage, bei gewissen Voraussetzungen, für holomorphe lokallokaltriviale Familien $\pi : X \to M$ Riemannscher Flächen. Diese Verallgemeinerung wird mit anderen Methoden als der zitierte Satz von Stein bewiesen. Wenn f die in einem Gebiet Y von X vorgegebene meromorphe Funktion bezeichnet, Y_o ein relativ kompaktes Teilgebiet von Y und $f_o := f \mid Y_o$ ist, werden approximierende Funktionen $h_i : \pi^{-1}\,\pi\,(Y_o) \to \bar{\mathbb{C}}$ so konstruiert, daß die Beschränkungen von f und aller h_i auf die kompakten Teile $\overline{Y_o} \cap X_t$ der Fasern X_t, $t \in \pi(Y_o)$, in gleichen Punkten gleiche Vielfachheiten besitzen. Ist die komplexe Mannigfaltigkeit X Steinsch, so benutzt man auf X dazu den wohlbekannten Approximationssatz von Weil, Oka und Cartan (siehe [5]). Dessen Beweis, wie er in [10], chapter VII, A, zu finden ist, läßt sich auf den Fall übertragen, daß π eigentlich abbildet, die komplexe Basismannigfaltigkeit M Steinsch ist und zur Approximation in X meromorphe Funktionen zugelassen werden. Es wird der Kohärenzsatz von Grauert benötigt und Anwendungen davon, wie sie in [8] zu finden sind und von Riemenschneider [17] vollständig bewiesen wurden. Die gewünschten Transformationsabbildungen g_i schließ-

lich gewinnt man durch die Definition von Abbildungen " $f_o^{-1} \cdot h_i$ " mit Hilfe des Hartogs'schen Kontinuitätssatzes.

Ferner werden in einem Anhang folgende Ergebnisse über holomorphe lokal-lokaltriviale Familien $\pi : X \to M$ kompakter Riemannscher Flächen mit Steinscher komplexer Basismannigfaltigkeit M bewiesen:

Durch meromorphe Beschränkung der in X meromorphen Funktionen auf eine Faser X_t, die vom Geschlecht $g \neq 1$ ist, erhält man alle holomorphen Abbildungen $f : X_t \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Hat X_t das Geschlecht $g = 1$, lassen sich die holomorphen Abbildungen $f : X_t \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ in eine Schlauchumgebung von X_t holomorph fortsetzen.

Ist D ein nichtleerer Divisor auf X, der keine Faser der Familie vollständig enthält, dann ist die Restmannigfaltigkeit X - D Steinsch.

Für eine offene Teilmenge Y von X gilt bei geeigneter Definition einer Topologie in der Menge $\mathcal{M}(Y)$ der meromorphen Funktionen auf Y:
Genau dann ist Y $\mathcal{M}(X)$-konvex, wenn Y $\mathcal{M}(Y)$-konvex ist und $\mathcal{M}(X) \mid Y$ dicht in $\mathcal{M}(Y)$ liegt.

Anregung und Ermutigungen zu dieser Arbeit dankt der Verfasser Herrn Professor Dr. Karl Stein.

II. ZUSAMMENSTELLUNG BENÖTIGTER DEFINITIONEN UND SÄTZE

Der offene Polyzylinder im n-dimensionalen komplexen Zahlraum $\mathbb{C}^n$ mit Mittelpunkt $w = (w_1,\ldots,w_n)$ und Polyradius $r = (r_1,\ldots,r_n)$, $r_i > 0$, werde mit $\Delta^n(w;r)$ bezeichnet. Gemäß [12], Def. 1.1 und 1.4 geben wir folgende

Definition 1: Es seien X und M zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten und $\pi: X \to M$ eine surjektive holomorphe Abbildung. Alle Fasern $X_t := \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, seien Riemannsche Flächen, deren jeweilige komplexe Struktur mit der von X verträglich ist. Zu jedem Punkt $x \in X$ sollen eine offene Umgebung U von x und biholomorphe Abbildungen $u: U \to \Delta^{n+1}(0;1)$ und $v: \pi(U) \to \Delta^n(0;1)$ derart existieren, daß das Diagramm

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xrightarrow{u} & \Delta^{n+1}(0;1) \\
(*) & & \pi|U \downarrow & & \downarrow \quad \text{Projektion } (z_1,\ldots,z_n,z_{n+1}) \mapsto \\
 & & \pi(U) & \xrightarrow[v]{} & \Delta^n(0;1) \qquad\qquad (z_1,\ldots,z_n)
\end{array}
$$

kommutiert. Dann nennt man $\pi: X \to M$ eine holomorphe Familie Riemannscher Flächen. Wird zusätzlich von π vorausgesetzt, daß es eine eigentliche Abbildung ist, die Fasern also aus kompakten Riemannschen Flächen bestehen, so spricht man von einer eigentlichen holomorphen Familie.

Bemerkungen: 1. Wegen Eigenschaft (*) sagt man, die Familie $\pi : X \to M$ sei lokal-lokaltrivial. Die spezielle Wahl der Bildgebiete von u und v bedeutet keine Einschränkung. Aus praktischen Gründen fordern wir sogar $u(x) = 0$ und $v(\pi(x)) = 0$.

2. Die Fasern einer eigentlichen holomorphen Familie $\pi : X \to M$ mit zusammenhängender Basismannigfaltigkeit M sind topologisch äquivalent. Insbesondere haben alle Fasern das gleiche Geschlecht. Dies folgt aus Proposition 1 in [14].

Sei $\pi: X \to M$ eigentliche holomorphe Familie Riemannscher Flächen und sei E eine kohärente analytische Modulgarbe auf X. Die Garbe der holomorphen Funktionskeime in X bzw. M werde mit ${}_X\mathcal{O}$ bzw. ${}_M\mathcal{O}$ bezeichnet, oder, wenn aus dem Zusammenhang erkennbar, einfach mit $\mathcal{O}$. Sei $t_o \in M$ ein beliebiger Punkt und $\{t_o\}$ die aus t_o bestehende analytische Menge in M. Mit $m(t_o)$ werde die maximale Idealgarbe von $\{t_o\}$ in M bezeichnet. $K(t_o)$ sei diejenige analytische Untergarbe von ${}_X\mathcal{O}$, die von den Funktionskeimen

$$(f \cdot \pi)_x \quad \text{mit} \quad f \in (m(t_o))_{\pi(x)}$$

erzeugt wird. Man setzt

$$E_{t_o} := {}^{E}\,/\,_{K(t_o)\cdot E} \mid X_{t_o}$$

und erhält eine kohärente analytische Garbe über X_{t_o}. Die Strukturgarbe von X_{t_o} ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{t_o} := {}^{X}\mathcal{O}\,/\,_{K(t_o)} \mid X_{t_o}$$

Das wichtigste Hilfsmittel für Teile dieser Arbeit sind die Sätze 5 und 6 in § 7 von [8], die in [17] vollständig bewiesen wurden. Wir formulieren diese Aussagen mit obiger Terminologie für unseren speziellen Anwendungsfall:

Satz 1: $\pi : X \to M$ sei eine holomorphe Familie kompakter Riemannscher Flächen mit zusammenhängender Basismannigfaltigkeit M. Die kohärente analytische Modulgarbe E auf X sei π-platt [2]. Dann gilt:

a) Die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\dim H^0(X_t,E_t) - \dim H^1(X_t,E_t)$$

ist konstant auf M.

Wird zusätzlich verlangt, daß $\dim H^\ell(X_t,E_t)$ in einer offenen Umgebung U von $t_0 \in M$ nicht von $t \in U$ abhängt, dann folgt:

b) Die ℓ-te direkte Bildgarbe $\pi_\ell(E)$ von E unter π ist über U lokal frei.

c) Die natürlichen Homomorphismen

$$\lambda_t^\ell : \pi_\ell(E)_t \;/\; (\pi_\ell(E) \cdot m(t))_t \to H^\ell(X_t,E_t)$$

sind bijektiv in allen Punkten t von U.

Bemerkung: Eine lokal freie Garbe E über X ist π-platt, weil $\pi : X \to M$ als lokal-lokaltrivial vorausgesetzt war. Vergleiche dazu [9], chapitre 0, §6.1.1 und §6.7.1, sowie [4], chap. I, §2, n^o 3 und n^o 4.

Corollar 1: Ist $\pi : X \to M$ eine holomorphe Familie kompak-

---

2) Eine äquivalente Formulierung lautet: E ist platt über M. Zur Definition von platt siehe [8], §7.4.

ter Riemannscher Flächen mit Steinscher Basismannigfaltigkeit M, E eine kohärente analytische π-platte Modulgarbe auf X, U eine offene Umgebung eines Punktes $t_o \in M$, in der dim $H^\ell(X_t,E_t)$ konstant ist für $t \in U$, dann ist die Beschränkungsabbildung

$$p : H^\ell(X,E) \to H^\ell(X_{t_o},E_{t_o})$$

surjektiv.

Beweis des Corollars: Sei r ein Element von $H^\ell(X_{t_o},E_{t_o})$. Nach Satz 1c) gibt es einen Keim $(s)_{t_o}$ im Halm $(\pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o))_{t_o}$, der Urbild von r unter $\lambda^\ell_{t_o}$ ist.

Der Träger der Garbe $\pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o)$ in der Steinschen komplexen Mannigfaltigkeit M ist die analytische Menge $\{t_o\}$. Der Keim $(s)_{t_o}$ induziert folglich ein Element S von $H^o(M,\pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o))$.

Die Garbensequenz

$$0 \to \pi_\ell(E) \cdot m(t_o) \to \pi_\ell(E) \to \pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o) \to 0$$

ist exakt. Gleiches gilt für die zugehörige Cohomologiesequenz

$$(+) \quad H^o(M,\pi_\ell(E)) \to H^o(M,\pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o)) \to H^1(M,\pi_\ell(E) \cdot m(t_o))$$

Gemäß [8], Hauptsatz 1, sind die Bildgarben $\pi_\ell(E)$, und damit auch $\pi_\ell(E) \cdot m(t_o)$, kohärente analytische Modulgarben über M. Da M Steinsch ist, liefert Cartans Theorem B

$$H^1(M,\pi_\ell(E) \cdot m(t_o)) = 0.$$

Wegen der Exaktheit von (+) besitzt $S \in H^o(M,\pi_\ell(E) \;/\; \pi_\ell(E) \cdot m(t_o))$ ein Urbild T in $H^o(M,\pi_\ell(E))$. Aus [8], §2, Satz 5 folgt, daß in $H^\ell(X,E)$ ein isomorphes Bild R von $T \in H^o(M,\pi_\ell(E))$ existiert, dessen Beschränkung p(R) auf X_{t_o} mit r übereinstimmt, q.e.d.

Bemerkung: Wir verweisen im Zusammenhang mit Corollar 1 auf die Theoreme 2.2 und 18.1 in [12] und das Theorem 12 in [13].

Zur einfacheren Formulierung brauchen wir die

Definition 2: Sei U eine offene Umgebung eines Punktes x in einer Riemannschen Fläche und $f : U \to \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann heißt die ganze Zahl

$$\operatorname{ord}_x(f) := \begin{cases} 0, & \text{falls f konstant ist.} \\ k, & \text{falls f in x holomorph ist und eine} \\ & \text{k-fache f(x)-Stelle hat.} \\ -k, & \text{falls f in x einen k-fachen Pol besitzt.} \end{cases}$$

die (Verzweigungs-) Ordnung von f im Punkt x. Diese Definition weicht von der in der Literatur üblichen ab.

Der Begriff des Divisors auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist wohlbekannt. Vollständigkeitshalber sollen hier die für uns wesentlichen Tatsachen zusammengestellt werden.

Definition 3: Die Quotientengarbe $\mathcal{D}$ der Garbe $\mathcal{M}^*$ der invertierbaren meromorphen Funktionskeime nach der Untergarbe $\mathcal{O}^*$ der invertierbaren holomorphen Funktionskeime heißt die Garbe der Keime der Divisoren auf X. Die Untergarbe $\mathcal{D}^+ := \operatorname{Im}(\mathcal{O}-\{0\} \to \mathcal{D})$ heißt die Garbe der Keime der positiven Divisoren auf X. Ihre Halme $\mathcal{D}^+_x$, $x \in X$, bestehen aus den Keimen von $\mathcal{D}_x$, die holomorphe nicht identisch verschwindende Repräsentanten besitzen.

Offensichtlich äquivalent zur Definition 3 ist für eine kompakte Riemannsche Fläche X_o die

Definition 4: $\mathbb{Z}$ bezeichne den Ring der ganzen Zahlen. Ein Divisor auf X_o ist eine Abbildung $D : X_o \to \mathbb{Z}$, sodaß $D(p) \neq 0$ nur für endlich viele Punkte $p \in X_o$ gilt.

Ferner versteht man unter dem Grad des Divisors D die ganze Zahl

$$\operatorname{grad} D := \sum_{p \in X_o} D(p).$$

Seien $\pi : X \to M$ eine eigentliche holomorphe Familie kompakter Riemannscher Flächen, $D \in H^o(X, \mathcal{D})$ ein Divisor auf X, $\{m_x\}_{x \in X}$ mit $m_x \in \mathcal{M}^*_x$ ein Repräsentantensystem von D, $\{U_x\}_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X, und g_x, $h_x : U_x \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen in U_x, $x \in X$, mit folgenden Eigenschaften: In allen Punkten $y \in U_x$ sind die Keime $(g_x)_y$ und $(h_x)_y$ teilerfremd und es gilt für alle Punkte x von X:

$$(g_x / h_x)_x = m_x .$$

Die Menge

$$A := \{x \in X : g_x(x) \cdot h_x(x) = 0\}$$

der Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen des Divisors D ist analytisch in X und durch D eindeutig bestimmt, unabhängig von der speziellen offenen Überdeckung $\{U_x\}_{x \in X}$ und der Wahl der teilerfremden Funktionen g_x, h_x. (In diesem Sinne schreibt man auch X - D anstatt X - A und spricht vom Rest von X nach Herausnahme des Divisors D.)

Sei umgekehrt A eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit X, die in jedem Punkt $x \in X$ mit geeigneter offener Umgebung U_x dargestellt werden kann durch das Nullstellengebilde einer einzigen holomorphen Funktion $f_x : U_x \to \mathbb{C}$, also

$$A \cap U_x = \{y \in U_x : f_x(y) = 0\} .$$

Wenn $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ die Zerlegung von A in irreduzible Komponenten ist, dann läßt sich jeder Zweig A_i in jedem Punkt auffassen als das Nullstellengebilde eines einzigen holomorphen irredu-

ziblen Funktionskeims (vergleiche [10], chapter II, E, Theorem 19). Für i = 1,...,n existiert demnach mindestens je ein positiver Divisor D^+_i auf X, dessen Nullstellenfläche gleich A_i ist. Zu der analytischen Menge A kann man also einen positiven Divisor, nämlich

$$\prod_{i=1}^{n} D^+_i \in H^0(X, \mathcal{D}^+),$$

angeben, dessen Nullstellenfläche mit A übereinstimmt.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß es zu jedem Divisor $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ einen positiven Divisor $D^+ \in H^0(X, \mathcal{D}^+)$ gibt, dessen analytische Menge von Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen mit der von D zusammenfällt.

Für die Fasern X_t, $t \in M$, einer Familie $\pi : X \to M$ kompakter Riemannscher Flächen kann die Beschränkung $D_t : X_t \to \mathbb{Z}$ eines Divisors $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ erklärt werden, falls X_t nicht ganz in der analytischen Menge der Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen von D liegt. Und zwar setzt man mit Hilfe einer Repräsentantendarstellung $\{m_x\}_{x \in X}$, $m_x \in \mathcal{M}^*_x$, von D:

$$D_t(p) := \begin{cases} 0, \text{ falls die meromorphe Beschränkung } m_p |_m X_t \\ \quad \text{in p einen Wert aus } \mathbb{C}^* \text{ annimmt,} \\ \operatorname{ord}_p(m_p |_m X_t) \text{ sonst, } p \in X_t. \end{cases}$$

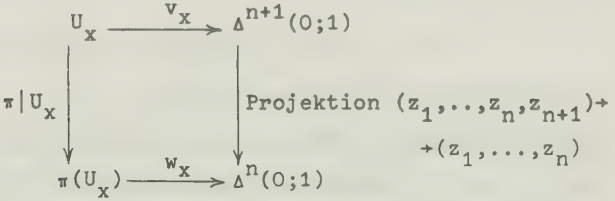
($\mathbb{C}^*$ bezeichnet die multiplikative Gruppe der von 0 verschiedenen komplexen Zahlen.) Offensichtlich ist die Definition von D_t unabhängig vom verwendeten Repräsentantensystem für D.

Hilfssatz 1: Die Gesamtheit der Spurpunkte t von Fasern X_t, die vollständig in der analytischen Menge A der Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen eines Divisors $D \in H^0(X, \mathcal{D})$

enthalten sind, bilden eine analytische Menge T in M. Der Grad der für alle Punkte t der Restmannigfaltigkeit M - T wohlerklärten Divisoren $D_t := D \mid X_t$ hängt nicht von $t \in (M - T)$ ab.

Beweis: Zu jedem Punkt x von X existiert eine offene Umgebung U_x mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt biholomorphe Abbildungen $v_x : U_x \to \Delta^{n+1}(0;1)$ und $w_x : \pi(U_x) \to \Delta^n(0;1)$ derart, daß das Diagramm



kommutiert (dabei ist n die komplexe Dimension von M). Ferner sei $v_x(x) = 0$.

2. In $\Delta^{n+1}(0;1)$ sind holomorphe Funktionen g_x, h_x erklärt, deren Keime $(g_x)_y$, $(h_x)_y$ in allen Punkten $y \in \Delta^{n+1}(0;1)$ teilerfremd sind und deren Quotient g_x/h_x den vermöge v_x^{-1} auf $\Delta^{n+1}(0;1)$ gelifteten Divisor $D \mid U_x$ repräsentiert.

Für Punkte x einer solchen Faser X_{t_o}, die nicht gänzlich in A liegt, sind g_x und h_x im Punkt 0 von $\Delta^{n+1}(0;1)$ z_{n+1}-allgemein, etwa von der Ordnung r_x bzw. s_x (man sagt auch, g_x und h_x sind regulär von Ordnung r_x bzw. s_x in der Variablen z_{n+1} am

Nullpunkt von $\Delta^{n+1}(0;1)$; siehe [10], chapter I,B,Definition 1). Die endlich vielen Punkte der Faser X_{t_o}, die zum Durchschnitt mit A gehören, seien mit $x_1,\ldots,x_\ell$ bezeichnet. In $\Delta^{n+1}(0;1)$ existiert ein offener Polyzylinder $\Delta^{n+1}(0;k)$, $k=(k_1,..,k_n,k_{n+1})$, $0 < k_\nu < 1$, mit folgender Eigenschaft:

für alle Punkte $(z_1,\ldots,z_n)\in \Delta^n(0;(k_1,\ldots,k_n))$ haben die Funktionen $g_{x_i}(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})$ und $h_{x_i}(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})$, $1 \le i \le \ell$, als Funktionen der einen komplexen Veränderlichen z_{n+1} in der Kreisscheibe $\{z_{n+1}: |z_{n+1}| < k_{n+1}\}$ genau r_{x_i} bzw. s_{x_i} Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt).

Jetzt errechnet man, daß für alle Punkte t einer hinreichend kleinen Umgebung von t_o

$$\text{grad } D_t = \sum_{i=1}^{\ell} r_{x_i} - \sum_{i=1}^{\ell} s_{x_i}$$

gilt und deshalb dort konstant ist.

Wenn die Faser X_{t_o} völlig in A enthalten ist, greifen wir einen Punkt x von X_{t_o} heraus und entwickeln dort $g_x \cdot h_x$ in eine Potenzreihe:

$$(g_x \cdot h_x)(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1}) = \sum_{m=o}^{\infty} a_m(z_1,\ldots,z_n)\, z_{n+1}^{\,m}$$

Für alle Punkte t von $\pi(U_x)$, wo $(g_x \cdot h_x)(w_x(t),z_{n+1})$ als Funktion von z_{n+1} identisch verschwindet, ist die Faser X_t ganz in A gelegen, und umgekehrt wird die Menge T der Spurpunkte solcher Fasern lokal durch die Menge

$$T_o := \{t\in M : a_m(w_x(t)) = 0 \text{ für alle } m = 0,1,2,\ldots\}$$

dargestellt. T_o, und damit T, ist analytisch in M (siehe [10], chapter II,E, Theorem 3).

Ferner ist M - T zusammenhängend, weil M zusammenhängend war (siehe [10], chapter II,E, Theorem 2), woraus nun folgt, daß der Grad von D_t auf der gesamten Restmannigfaltigkeit M - T

nicht von t abhängt.

Mit diesem Beweis beenden wir auch die Ausführungen über Divisoren und kommen zu

Hilfssatz 2: Z sei eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und z_o ein Punkt in Z. Dann gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in (Z - \{z_o\})$ eine meromorphe Funktion $f: Z \to \bar{\mathbb{C}}$, die nur in z_o einen Pol besitzt und die Punkte x_1, x_2 trennt, d.h. für die

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

gilt.

Der Beweis geschieht zusammen mit dem Beweis von

Hilfssatz 3: Z, z_o, g wie oben. Es existiert zu jedem beliebigen Punkt $x_3 \in Z$, der von z_o verschieden ist, eine meromorphe Funktion $h: Z \to \bar{\mathbb{C}}$, die in $Z - \{z_o\}$ holomorph ist und in einer Umgebung des Punktes x_3 injektiv abbildet, d.h. für die

$$\operatorname{ord}_{x_3}(h) = 1$$

gilt.

Beweise: Ohne Einschränkung kann man $x_3 = x_1$ annehmen. Zunächst werden zwei Divisoren $D_1, D_2: Z \to \mathbb{Z}$ definiert; und zwar D_1 durch

$$D_1(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in (Z - \{z_o\}) \\ -2(g-1) - 2 & \text{für } z = z_o \end{cases}$$

und D_2 durch

$$D_2(z) := \begin{cases} D_1(z) & \text{für } z \in (Z - \{x_1\}) \\ -1 & \text{für } z = x_1 \end{cases}$$

Es bezeichne $\mathcal{O}_{D_i}$ die Garbe der meromorphen Funktionskeime auf der kompakten Riemannschen Fläche Z, die Vielfache des Divisors D_i sind, i = 1,2 . Mit dem Satz von Riemann und Roch erhält man

$$\dim H^0(Z,\mathcal{O}_{D_2}) = \dim H^1(Z,\mathcal{O}_{D_2}) + 1 - g - \text{grad } D_2 =$$

$$= 1 - g + 2(g-1) + 2 + 1 = g + 2 \geq 2,$$

weil $\dim H^1(Z,\mathcal{O}_{D_2})$ wegen grad $D_2 < -2(g-1)$ gleich Null ist. Ebenso ergibt sich

$$\dim H^0(Z,\mathcal{O}_{D_1}) = g + 1 \geq 1 .$$

Also existiert eine meromorphe Funktion

$$a \in H^0(Z,\mathcal{O}_{D_2}) - H^0(Z,\mathcal{O}_{D_1})$$

mit $\text{ord}_{x_1}(a) = -1$. Sei b eine nichtkonstante meromorphe Funktion aus $H^0(Z,\mathcal{O}_{D_1})$, deren Werte in x_1 und x_2 übereinstimmen. (Wenn keine solche Funktion existiert, dann trennen die nichtkonstanten Funktionen von $H^0(Z,\mathcal{O}_{D_1})$ die Punkte x_1, x_2 und damit bleibt für Hilfssatz 2 nichts zu zeigen. In diesem Falle wähle man irgendeine nichtkonstante Funktion $b \in H^0(Z,\mathcal{O}_{D_1})$ und betrachte nur noch die Konstruktion von h.) Sei ferner $d := \text{ord}_{x_1}(b)$. Setzt man

$$f := a^d \cdot (b - b(x_1)) \quad \text{und}$$

$$h := a^{d-1} \cdot (b - b(x_3)) ,$$

so haben diese auf Z definierten meromorphen Funktionen die

in Hilfssatz 2 bzw. 3 verlangten Eigenschaften. Es ist nämlich $f(x_1) \neq 0$ und $f(x_2) = 0$. h verschwindet in $x_3 = x_1$ von der Ordnung 1 .

Die Begriffe "holomorph-konvex" und "meromorph-konvex" sind aus der Literatur (siehe z.B. [3]) wohlbekannt. Wir bringen gleich die allgemeinere

Definition 5: Es seien N eine Teilmenge der komplexen Mannigfaltigkeit X, und $\mathcal{A}(X)$ eine Teilmenge der Menge $\mathcal{M}(X)$ der in X meromorphen Funktionen. Die Menge der Funktionen aus $\mathcal{A}(X)$, die in allen Punkten von N holomorph sind, werde mit $\mathcal{A}(X;N)$ bezeichnet. Ein kompakter Teil K von X heißt $\mathcal{A}(X)$-konvex, wenn er mit der $\mathcal{A}(X)$-konvexen Hüllé $K(\mathcal{A}(X),X)$ von K in X übereinstimmt. Dabei besteht $K(\mathcal{A}(X),X)$ aus der Menge der Punkte x von X, zu denen es keine Funktion g von $\mathcal{A}(X;K \cup \{x\})$ gibt, die die Ungleichung

$$|g(x)| > \|g\|_K$$

erfüllt.

Man nennt einen offenen Teil Y von X $\mathcal{A}(X)$-konvex, wenn für alle kompakten Teile L von Y zutrifft, daß der Durchschnitt

$$L(\mathcal{A}(X),Y) := Y \cap L(\mathcal{A}(X),X)$$

kompakt ist.

Bemerkung: Jeder kompakte Teil K einer Riemannschen Fläche X ist meromorph-konvex, und damit jeder offene Teil von X meromorph-konvex relativ zu X. Bei kompaktem X kann man

nämlich mit dem Satz von Riemann und Roch, bei nichtkompaktem X mit dem Satz von Mittag-Leffler (siehe [2], Satz 1) zu jedem Punkt x von X-K eine Funktion g aus $\mathcal{M}(X;K)$ konstruieren, die in x einen Pol hat. Sei $k := \|g\|_K$ und z ein Punkt von $\bar{\mathbb{C}}$ mit $|z| = 3k$. Die gebrochen lineare Transformation

$$T(w) := \frac{w\,z}{w - z}$$

der kompaktifizierten komplexen Ebene $\bar{\mathbb{C}}$ auf sich mit der Beziehung $(T\cdot g)(x) = z$ genügt der Ungleichung

$$\|T\|_{\{|w| \leq k\}} \leq \frac{k\,|z|}{|z| - k} < |z|$$

Für die Funktion $T\cdot g \in \mathcal{M}(X;K\cup\{x\})$ gilt also

$$|(T\cdot g)(x)| > \|T\cdot g\|_K$$

Folglich gehört x nicht zur meromorph-konvexen Hülle $K(\mathcal{M}(X),X)$ von K in X, und K stimmt mit $K(\mathcal{M}(X),X)$ überein.

Hilfssatz 4: Es seien $\pi: X \to M$ eine eigentliche holomorphe Familie Riemannscher Flächen mit Geschlecht g über dem Steinschen Basisraum M, und D ein Divisor in X, der jede Faser X_t, $t \in M$, trifft. Dann trennen die Funktionen aus $\mathcal{M}(X;X-D)$ die Punkte in X - D.

Beweis:

1. Nach Voraussetzung ist M Steinsch; das bedeutet, es gibt eine holomorphe Funktion $H: M \to \mathbb{C}$, die zwei verschiedene Punkte $t_1, t_2 \in M$ trennt. Demnach trennt $H \cdot \pi$ alle Punkte $x_1, x_2 \in X$, die auf verschiedenen Fasern liegen. Damit ist

der Fall erledigt, daß zugleich $x_1 \neq x_2$ und $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ gilt.

2. Sei also $x_1, x_2 \in X - D$, $x_1 \neq x_2$ und $\pi(x_1) = \pi(x_2) =: t_o$. Laut Hilfssatz 2 läßt sich eine meromorphe Funktion $h \in \mathcal{M}(X_{t_o}; X_{t_o} - (D \cap X_{t_o}))$ angeben, die x_1 und x_2 trennt. Sei $\{f_x\}_{x \in X}$, $f_x \in \mathcal{O}_x$, ein Repräsentantensystem eines positiven Divisors $D^+ \in H^o(X, \mathcal{D}^+)$, dessen Nullstellenfläche mit der analytischen Menge der Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen von D übereinstimmt. Es gibt eine offene Umgebung U von t_o derart, daß $D^+_t := D^+|X_t$ für $t \in U$ definiert, und grad (D^+_t) nach Hilfssatz 1 von t unabhängig ist. Man hat grad $(D^+_{t_o}) > 0$. Sei die natürliche Zahl k so groß gewählt, daß

$$\text{grad}(D^+_{t_o})^k > 2(g-1)$$

und

$$f_x^k \cdot (h)_x \in \mathcal{O}_x \quad \text{für alle } x \in X_{t_o}$$

gilt. Der Divisor $(D^+)^k$ definiert in kanonischer Weise ein Geradenbündel G auf X. Mit $\mathcal{O}(G)$ sei die Garbe der Keime der holomorphen Schnitte von G bezeichnet. $\{f_x^k\}_{x \in X}$ repräsentiert einen globalen Schnitt in $\mathcal{O}(G)$ und

$$\{f_x^k \cdot (h)_x\}_{x \in X_{t_o}}$$

induziert ein Element s aus $H^o(X_{t_o}, \mathcal{O}(G)_{t_o})$. Für alle $t \in U$

sind die endlichdimensionalen komplexen Vektorräume $H^o(X_t,\mathcal{O}(G)_t)$ und $H^o(X_t,\mathcal{O}_{-(D^+_t)^k})$ isomorph (vergleiche [11], Satz 15.2.1). Mit dem Satz von Riemann und Roch folgt

$$\dim H^o(X_t,\mathcal{O}(G)_t) = \dim H^o(X_t,\mathcal{O}_{-(D^+_t)^k}) =$$

$$= \dim H^1(X_t,\mathcal{O}_{-(D^+_t)^k}) + 1 - g + \operatorname{grad}(D^+_t)^k = \text{constans}$$

für $t \in U$, weil $\dim H^1(X_t,\mathcal{O}_{-(D^+_t)^k})$ verschwindet. Die kohärente analytische Modulgarbe $\mathcal{O}(G)$ auf X ist lokal frei und daher platt über der Basismannigfaltigkeit M der lokal-lokaltrivialen Familie $\pi : X \to M$. Corollar 1 kann angewendet werden: es existiert ein Schnitt $S \in H^o(X,\mathcal{O}(G))$, dessen Beschränkung auf die Faser X_{t_o} gleich s ist. Sei $\{g_x\}_{x \in X}$ ein Repräsentantensystem von S, wobei g_x aus $\mathcal{O}_x$ stammt. Die meromorphen Funktionskeime

$$\frac{g_x}{f_x^k} \quad , \quad x \in X \ ,$$

sind meromorphe Fortsetzungen voneinander, erklären also auf X eine meromorphe Funktion H, die zu $\mathcal{M}(X; X\text{-}D)$ gehört sowie $H \mid X_{t_o} = h$ und deshalb

$$H(x_1) = h(x_1) \neq h(x_2) = H(x_2)$$

erfüllt.

Hilfssatz 5: Unter gleichen Voraussetzungen wie zu Hilfssatz 4 gibt es zu beliebigem Punkt $x \in (X-D)$ $n+1$ Funktionen $F_1,\ldots,F_{n+1} \in \mathcal{M}(X;X-D)$ mit

$$\operatorname{Rang}_x (F_1,\ldots,F_{n+1}) = \dim_{\pi(x)} M + 1 = n + 1.$$

Beweis: M ist Steinsch, d.h. es gibt holomorphe Funktionen $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{O}(M)$ mit

$$\operatorname{Rang}_{\pi(x)} (f_1,\ldots,f_n) = n$$

Man setze $F_i := f_i \cdot \pi$, $i=1,\ldots,n$. Hilfssatz 3 liefert eine meromorphe Funktion $h \in \mathcal{M}(X_{\pi(x)}; X_{\pi(x)}-D|X_{\pi(x)})$, die $\operatorname{ord}_x(h) = 1$ erfüllt. Wie im Beweis zu Hilfssatz 4 läßt sich h meromorph auf ganz X zu einer Funktion $F_{n+1} \in \mathcal{M}(X;X-D)$ fortsetzen. Es ergibt sich unmittelbar

$$\operatorname{Rang}_x(F_1,\ldots,F_{n+1}) = \dim_{\pi(x)} M + 1 .$$

Bevor nun der benötigte Approximationssatz für eigentliche Familien Riemannscher Flächen bewiesen wird, formulieren wir einen Hilfssatz, der einer klassischen Aussage über Oka-Weil Gebiete (siehe [10], chapt. VII, A,Def.2) nachgebildet ist.

Hilfssatz 6: Es seien X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit mit komplexer Dimension n, K ein kompakter $\mathcal{M}(X)$-konvexer Teil von X und U eine offene Umgebung von K. Die meromorphen Funktionen aus $\mathcal{M}(X;U)$ mögen die Punkte von U trennen und lokale Karten in allen Punkten von U definieren. Dann gibt es in U eine

offene Umgebung V von K und für geeignetes $t > 0$ eine injektive eigentliche holomorphe reguläre Abbildung $w : V \to \Delta^t(0;1)$, die durch t Funktionen aus $\mathcal{M}(X;U)$ erklärt ist.

Beweis

(vgl. Beweis zu [10], chapt.VII,A,Prop.3): Weil K kompakt ist, gibt es in U eine kompakte Umgebung U_o von K, deren offener Kern schon ganz K enthält. Das Kartesische Produkt $\tilde{U} := U_o \times U_o$, versehen mit der Produkttopologie, ist ebenfalls kompakt. U_o läßt sich durch endlich viele lokale Karten überdecken, die durch globale Funktionen $f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{M}(X;U)$ definiert sind; d.h. es gibt zu jedem Punkt $x \in U_o$ Indizes $i_1,\ldots,i_n$ mit

$$\mathrm{Rang}_x\,(f_{i_1},\ldots,f_{i_n}) = n\ .$$

Folglich existiert zu jedem Punkt p der Diagonalen D von $\tilde{U}$ eine offene Umgebung W_p in $\tilde{U}$ derart, daß jezwei verschiedene Punkte $x,y \in U_o$ mit $(x,y) \in W_p$ durch eine geeignete Funktion aus $\{f_1,\ldots,f_r\}$ getrennt werden. Sei p ein Punkt aus $\tilde{U} - \bigcup_{q \in D} W_q$. Man kann eine Funktion f_p aus $\mathcal{M}(X;U)$ finden, die für alle Punkte $q = (x,y)$ einer geeigneten offenen Umgebung W_p von p in $\tilde{U}$

$$f_p(x) \neq f_p(y)$$

erfüllt. Endlich viele offene Umgebungen W_p mit zugehörigen Funktionen $f_{r+1},\ldots,f_s$ überdecken $U - \bigcup_{q \in D} W_q$. Zu je zwei verschiedenen Punkten $x,y \in U_o$ kann man also ein $f \in \{f_1,\ldots,f_s\}$ finden, das x und y trennt. Diese Eigenschaften der Funktionen $f_1,\ldots,f_s$ bleiben bei Multiplikation mit

einer Konstanten erhalten. Deshalb können wir

$$\|f_i\|_{U_o} \leq 1 \quad \text{für } i = 1,\ldots,s$$

annehmen.

Die Punkte p auf dem Rand von U_o liegen nicht in K. Es gibt also zu jedem solchen p eine meromorphe Funktion f aus $\mathcal{M}(X;U)$, die der Ungleichung

$$|f(p)| > 1 > \|f\|_K$$

genügt. Aus Gründen der Stetigkeit gilt $|f(q)| > 1$ für alle Punkte q einer offenen Umgebung von p. Der Rand von U_o läßt sich durch endlich viele solcher Umgebungen mit zugehörigen Funktionen $f_{s+1},\ldots,f_t$ überdecken.

$$V := \{p \in U_o;\ |f_i(p)| < 1 \quad \text{für alle } i=1,\ldots,t\}$$

ist die verlangte offene Umgebung von K und $v := (f_1,\ldots,f_t)$ ist injektiv und holomorph auf V. Es bleibt zu zeigen, daß $w := v|V$ eigentlich ist. Sei dazu L ein kompakter Teil von $\Delta^t(0;1)$. Es gilt

$$w^{-1}(L) = (v|U_o)^{-1}(L) \cap V = (v|U_o)^{-1}(L) \cap U_o$$

weil es zu einem Punkt $x \in (U_o - V)$ ein $f \in \{f_1,\ldots,f_t\}$ gibt mit

$$f(x) \geq 1, \quad \text{d.h.} \quad x \notin w^{-1}(L).$$

$(v|U_o)^{-1}(L)$ ist abgeschlossen in der kompakten Menge U_o, also ist $w^{-1}(L)$ kompakt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 2: Es seien X und M zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten, $\pi: X \to M$ eine eigentliche holomor-

phe Familie kompakter Riemannscher Flächen, K ein kompakter $\mathcal{M}(X)$-konvexer Teil von X, U eine offene Umgebung von K und $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Die Basis M sei Steinsch.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meromorphe Funktion $F \in \mathcal{M}(X;K)$, die

$$\|F - f\|_K < \varepsilon$$

erfüllt.

Beweis:

1. Zunächst behandeln wir den Fall, daß $K = \pi^{-1}(\pi(K))$ gilt. Ist x ein Punkt von X, der nicht in K liegt, dann existiert nach Voraussetzung eine Funktion $G \in \mathcal{M}(X;\{x\} \cup K)$ mit

$$|G(x)| > \|G\|_K .$$

In dem betrachteten Fall läßt sich G schreiben als Hintereinanderausführung von π und einer meromorphen Funktion $g \in \mathcal{M}(M;\{\pi(x)\} \cup \pi(K))$, die

$$|g(\pi(x))| > \|g\|_{\pi(K)}$$

erfüllt, weil G in einer offenen Umgebung $V = \pi^{-1}(\pi(V))$ von K holomorph und deshalb auf den Fasern X_s, $s \in \pi(V)$, konstant ist. Der Zusammenhang von X und der Identitätssatz für holomorphe Funktionen liefert dann $G = g \cdot \pi$. Es folgt, daß $\pi(K)$ meromorphkonvex in M ist. Da M Steinsch ist, darf man Hilfssatz 6 auf M und $\pi(K)$ anwenden und erhält eine offene Umgebung W von $\pi(K)$, die ohne Einschränkung $\pi^{-1}(W) \subset U$ erfüllt, und eine injektive eigentliche holomorphe Abbildung $w: W \to \Delta^t(0;1)$, t geeignet, die durch meromorphe Funktionen $m_1,\ldots,m_t$ aus $\mathcal{M}(M;W)$ erklärt ist. Nach Remmert ([16], Satz 23

oder [8],§7,Satz 1) ist w(W) eine abgeschlossene analytische Menge in $\Delta^t(0;1)$. Die vorgegebene holomorphe Funktion f ist auf allen Fasern X_s, $s \in W$, konstant, induziert also eine holomorphe Funktion h auf W. Da $\Delta^t(0;1)$ Steinsch ist, läßt sich die auf w(W) definierte Funktion $h \cdot w^{-1}$ zu einer in $\Delta^t(0;1)$ holomorphen Funktion H fortsetzen. H kann in eine Potenzreihe in den komplexen Variablen $z_1,\ldots,z_m$ entwickelt werden, deren Partialsummen kompakt gegen H konvergieren. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert also ein Polynom P derart, daß

$$\|H - P\|_{w(\pi(K))} < \varepsilon$$

gilt. Es folgt

$$\|h - P \cdot w\|_{\pi(K)} < \varepsilon$$

$P \cdot w$ ist ein Polynom in den meromorphen Funktionen $m_1,..,m_t$. Das bedeutet, daß die meromorphe Funktion
$F := (P \cdot w) \cdot \pi \in \mathcal{M}(X;K)$ die Ungleichung

$$\|F - f\|_K < \varepsilon$$

befriedigt.

2. Sei nun $K \neq \pi^{-1}(\pi(K))$ und $x \in (\pi^{-1}(\pi(K))-K)$.
Es existiert eine meromorphe Funktion $G \in \mathcal{M}(X;\{x\} \cup K)$, die der Ungleichung

$$|G(x)| > \|G\|_K$$

genügt. Weil $X_{\pi(x)} \cap K$ nicht leer ist, muß die Beschränkung von G auf $X_{\pi(x)}$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion sein. Die Menge A der Punkte von X, in denen G nicht holomorph ist, stellt eine analytische Menge dar, die in jedem Punkt durch eine einzige Funktion erklärt werden kann. Wie in dem Abschnitt über Divisoren gezeigt, gibt es einen positiven Di-

visor, dessen Nullstellengebilde mit A übereinstimmt. A trifft gemäß den Eigenschaften von δ die kompakte Menge K nicht, trifft aber andererseits nach Hilfssatz 1 alle Fasern X_s, $s \in M$. Aus den Hilfssätzen 4 und 5 erkennt man, daß es eine offene Umgebung U von K gibt derart, daß die meromorphen Funktionen aus $\mathcal{M}(X;U)$ die Punkte in U trennen und für jeden Punkt aus U eine lokale Karte definieren. Anwendung von Hilfssatz 6 bringt die Existenz einer offenen Umgebung V von K in U, und bei geeignetem $t > 0$ einer injektiven eigentlichen holomorphen Abbildung $w: V \to \Delta^t(0;1)$, die durch meromorphe Funktionen $m_1,\ldots,m_t$ aus $\mathcal{M}(X;U)$ gegeben ist. Wie im Fall 1 gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein Polynom in den $m_1,\ldots,m_t$, das sich auf K immer um einen Betrag kleiner ε von f unterscheidet.

q.e.d.

III. DER HAUPTSATZ

Wir formulieren den Hauptsatz (Satz 3) in drei Abschnitten: zuerst die allgemeinen Voraussetzungen, dann die speziellen Prämissen für Fall I (nichtkompakte Fasern) und die für Fall II (kompakte Fasern), schließlich die Aussage des Satzes. Zur Bezeichnung: Ist Y' eine Teilmenge von X , so werde $S(Y') := \pi^{-1}(\pi(Y'))$ gesetzt.

Satz 3: Es seien: X,M zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten, $\pi: X \to M$ eine holomorphe Familie Riemannscher Flächen, Y ein Gebiet in X, Y_o ein Gebiet, das zusammen mit dem Teil

$$R := \bigcup_{t \in \pi(Y_o)} Rd(X_t \cap Y_o)$$

des Randes von Y_o in Y enthalten ist, und $f: Y \to \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Auf R habe f keine Unbestimmtheitsstelle, und für alle Punkte $x \in R$ gelte

$$ord_x(f|(X_{\pi(x)} \cap Y)) = 1.$$

Entweder sei nun $S(Y_o)$ Steinsch und Y_o $\mathcal{O}(S(Y_o))$-konvex (Fall I),

oder es sei π eigentlich, $\pi(Y_o)$ Steinsch und Y_o $\mathcal{M}(S(Y_o))$-konvex (Fall II).

Dann existieren zu jedem relativ kompakten Teilgebiet Y_1 von Y_o injektive holomorphe Abbildungen $u_i: Y_1 \to (S(Y_1) \cap Y_o)$

und meromorphe Funktionen F_i: $S(Y_1) \to \bar{\mathbb{C}}$, i=1,2,..., mit folgenden Eigenschaften:

1) Die u_i sind fasertreu, d.h. $\pi(u_i(x)) = \pi(x)$ für alle $x \in Y_1$ und $i \in \mathbb{N}$.
2) Die Folge $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Inklusion $Y_1 \to (S(Y_1) \cap Y_o)$. Die F_i approximieren gleichmäßig in Y_1 die vorgegebene Funktion f.
3) Sei f_1 die Beschränkung der vorgegebenen Funktion f auf das Gebiet $(S(Y_1) \cap Y_o)$. Für alle i=1,2,... ist F_i meromorphe Fortsetzung von $f_1 \cdot u_i$: $Y_1 \to \bar{\mathbb{C}}$ auf das Schlauchgebiet $S(Y_1)$, d.h. es gilt $f_1 \cdot u_i = F_i \mid Y_1$.

Unter den Voraussetzungen im Satz 3 wird zunächst zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem relativ kompakten Teilgebiet Y_2 von Y_o eine meromorphe Funktion F in $S(Y_2)$ konstruiert, die sich in Y_2 von f dem Betrage nach um weniger als ε unterscheidet und deren Beschränkung auf die Fasern X_t in gleichen Punkten von Y_2 gleiche Vielfachheiten wie $f|X_t$ besitzt. Genauer beweisen wir folgenden

Hilfssatz 7: Die Voraussetzungen von Satz 3 einschließlich der für die Fallunterscheidung gemachten werden übernommen. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ und einem relativ kompakten Teilgebiet Y_2 von Y_o eine meromorphe Funktion F: $S(Y_2) \to \bar{\mathbb{C}}$ derart, daß

1) $(f \mid Y_2 - F \mid Y_2)$ holomorph ist;
2) $(f \mid (X_{\pi(x)} \cap Y_2) - F \mid (X_{\pi(x)} \cap Y_2))$ in all den Punkten $x \in Y_2$ mindestens von der Ordnung $p(x) + 1$ verschwindet, in denen f holomorph ist und

$p(x) := \mathrm{ord}_x(f \mid (X_{\pi(x)} \cap Y_2)) > 1$ gilt;

3) $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$ ist für alle Punkte $x \in Y_2$.

Beweis: Zu jedem Punkt x von $Y_o \cup R$ existieren eine in $S(Y_o)$ liegende offene Umgebung U_x von x, eine biholomorphe Abbildung

$$((\pi \mid U_x), z_x): \quad U_x \to \pi(U_x) \times \Delta^1(0;1),$$

und holomorphe Funktionen $g_x, h_x: U_x \to \bar{\mathbb{C}}$, derart, daß die Keime $(g_x)_y$, $(h_x)_y$ in allen Punkten y von U_x teilerfremd sind, und daß sich die gegebene Funktion f in U_x darstellen läßt als

$$f \mid U_x = \frac{g_x}{h_x} .$$

Man setze $V_{xy} := X_{\pi(y)} \cap U_x$ für $x \in (Y_o \cup R)$ und $y \in U_x$, und definiere die holomorphen Funktionen $\psi_x: U_x \to \mathbb{C}$ durch

$$\psi_x(y) := \left(\frac{d(g_x|V_{xy})}{d(z_x|V_{xy})}(y) \cdot h_x(y) - \frac{d(h_x|V_{xy})}{d(z_x|V_{xy})}(y) \cdot g_x(y) \right)^2.$$

Besitzen die Umgebungen U_{x_1}, U_{x_2} von $x_1, x_2 \in (Y_o \cup R)$ nichtleeren Durchschnitt, gilt für die Punkte y von $U_{x_1} \cap U_{x_2}$

$$\psi_{x_1}(y) = \left(\frac{h_{x_1}^2(y)}{h_{x_2}^2(y)} \cdot \frac{d(z_{x_2} \mid V_{x_2 y})}{d(z_{x_1} \mid V_{x_1 y})}(y) \right)^2 \cdot \psi_{x_2}(y),$$

und der quadratische Faktor verschwindet nirgends in $U_{x_1} \cap U_{x_2}$. Falls $\psi_x \equiv 0$ ist für ein $x \in Y_o$, muß f auf je-

der Faser $X_t \supset Y_o$, $t \in \tau(Y_o)$, konstant sein; f kann dann zu einer meromorphen Funktion $F: S(Y_o) \to \bar{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden - die Beweise von Hilfssatz 7 und Satz 3 wären erledigt. Wenn kein ψ_x identisch verschwindet, repräsentiert

$$\{\psi_x\}_{x \in Y_o} \cup \{1_x\}_{x \in (S(Y_o)-Y_o)}$$

einen positiven Divisor D_1 auf $S(Y_o)$. Dazu beachte man, daß auf R nach Voraussetzung über f kein ψ_x eine Nullstelle hat.

Im Fall I sei J die kohärente analytische Modulgarbe auf $S(Y_o)$, deren Keime über $\mathcal{O}_x$ erzeugt werden durch einen Repräsentanten $(D_1)_x$ von D_1 in $x \in S(Y_o)$. Die Prägarbensequenz

$$0 \to J \to S(Y_o)^{\mathcal{M}} \to S(Y_o)^{\mathcal{M}}/_J \to 0$$

und die zugehörige Cohomologiesequenz

$$\ldots \to H^o(S(Y_o),\mathcal{M}) \xrightarrow{\alpha} H^o(S(Y_o), {}^{\mathcal{M}}/_J) \to H^1(S(Y_o),J) \to \ldots$$

sind exakt. Aus Cartans Theorem B erhält man $H^1(S(Y_o),J)=0$. Das fest gewählte Repräsentantensystem $\{(D_1)_x\}_{x \in S(Y_o)}$ des Divisors D_1 läßt sich als 0-Cozyklus mit Werten in der Prägarbe $S(Y_o)^{\mathcal{M}}/_J$ interpretieren. Dieser Cozyklus und der 0-Cozyklus

$$\{f_x\}_{x \in Y_o} \cup \{0_x\}_{x \in (S(Y_o)-Y_o)}$$

mit Werten in $S(Y_o)^{\mathcal{M}}/_J$ repräsentieren je eine Cohomologieklasse von $H^o(S(Y_o), {}^{\mathcal{M}}/_J)$, die unter α Bild der holomorphen Funktion $h_I: S(Y_o) \to \mathbb{C}$ bzw. der meromorphen Funktion $m_I: S(Y_o) \to \bar{\mathbb{C}}$ seien.

Im Fall II kann davon ausgegangen werden, daß R jede Faser X_t, $t \in \pi(Y_o)$, trifft; denn ist eine Faser X_t ganz in Y_o enthalten, so muß $Y_o = S(Y_o)$ gelten, weil Y_o als $\mathcal{M}(S(Y_o))$-konvex vorausgesetzt war. Dann wären aber die Aussagen von Hilfssatz 7 und Satz 3 von vorneherein gültig.

Sei U_R eine in $S(Y_o) \cap Y$ liegende offene Umgebung von R mit folgenden Eigenschaften:

1. f besitzt in U_R keine Unbestimmtheitsstellen.
2. für jeden Punkt $x \in U_R$ gilt

$$\operatorname{ord}_x (f|(X_{\pi(x)} \cap Y)) = 1.$$

L sei die $\mathcal{M}(S(Y_o))$-konvexe Hülle von $\overline{Y_2}$. Es existiert ein relativ kompakt in der nach Voraussetzung Steinschen komplexen Mannigfaltigkeit $\pi(Y_o)$ liegender offener analytischer Polyeder P, der die kompakte Menge $\pi(L)$ umfaßt (vergleiche [10], chapter VII, B, Corollar 5). Sei K eine kompakte Teilmenge von Y_o, die folgenden Bedingungen genügt:

1. $\pi(\underline{K}) = P$, wobei $\underline{K}$ den offenen Kern von K bezeichnet.
2. $\underline{K}$ enthält L.
3. der zu $S(\underline{K})$ gehörende Rand von K liegt in U_R.

Bezeichne $\hat{K}$ die $\mathcal{M}(S(Y_o))$-konvexe Hülle von K. Es gibt eine meromorphe Funktion $G : S(Y_o) \to \bar{\mathbb{C}}$, die in $\hat{K}$ holomorph ist und für fast alle Punkte $y \in (S(Y_o) - \hat{K})$ die Ungleichung

$$\infty > |G(y)| > \|G\|_{\hat{K}}$$

erfüllt. Insbesondere ist G nicht konstant. Die analytische Menge $A \subset S(Y_o)$ der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von G trifft jede Faser von $S(Y_o)$, enthält aber keine Faser von $S(\hat{K})$ vollständig. Es existiert ein Divisor $D_2 \in H^o(S(\underline{K}), \mathcal{D}^+)$, dessen Nullstellenfläche mit $A \cap S(\underline{K})$ zusammenfällt. Die Beschrän-

kungen $D_2|X_t$ sind für $t \in \pi(\underline{K})$ wohlerklärt. $\operatorname{grad}(D_2|X_t)$ ist positiv und unabhängig von t (siehe Hilfssatz 1). Ebenso sind die Divisoren $D_1|X_t$ für alle $t \in \pi(\underline{K})$ wohlerklärt, und $\operatorname{grad}(D_1|X_t) =: q$ hängt nicht von t ab, weil D_1 in mindestens einem Punkt jeder Faser X_t, $t \in \pi(\underline{K})$, durch die Konstante 1 repräsentiert werden kann und daher die Voraussetzungen für Hilfssatz 1 gegeben sind.

Es seien: g das Geschlecht der kompakten Riemannschen Flächen X_t, $\ell := 2g + q - 1$, D_3 der durch $D_1 \cdot D_2^{-\ell} \mid S(\underline{K})$ definierte Divisor auf $S(\underline{K})$ und J die kohärente analytische Modulgarbe auf $S(\underline{K})$, deren Keime über $\mathcal{O}_x$ erzeugt werden durch einen Repräsentanten $(D_3)_x$ von D_3 in $x \in S(\underline{K})$. Die Garben $\mathcal{O}_{D_3}|X_t$ und J_t sind für $t \in \pi(\underline{K})$ isomorph. Für diese t folgt aus der Ungleichung

$$\operatorname{grad}(D_3|X_t) \leq -2g + 1 < -2(g-1)$$

die Beziehung

$$\dim H^1(X_t, J_t) = \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{D_3}|X_t) = 0.$$

J ist π-platt. Satz 1 sagt aus, daß die 1. direkte Bildgarbe $\pi_1(J)$ von J unter π lokal frei über $\pi(\underline{K})$ ist und daß dort

$$\pi_1(J)_t = (\pi_1(J) \cdot m(t))_t$$

gilt. Dabei bezeichnet m(t) die maximale Idealgarbe von $\{t\}$ in $\pi(\underline{K})$. Mit dem Lemma von Nakayama (siehe [15], chapter IV, proposition 1) kann man auf

$$\pi_1(J)_t = 0, \quad t \in \pi(\underline{K}),$$

schließen. Daraus ergibt sich $H^0(\pi(\underline{K}), \pi_1(J)) = 0$.
Da $\pi(\underline{K}) = P$ Steinsch ist, folgt aus [8], §2, Satz 5:

$$H^1(S(\underline{K}), J) \cong H^0(\pi(\underline{K}), \pi_1(J)) = 0.$$

Der Homomorphismus

$$\bar{\alpha}: \quad H^0(S(\underline{K}), \mathcal{M}) \to H^0(S(\underline{K}), \mathcal{M}/J)$$

ist surjektiv. Die 0-Cozyklen $\{(D_3)_x\}_{x \in S(\underline{K})}$ und

$$\{f_x\}_{x \in (S(\hat{\underline{K}}) \cap K)} \cup \{0_x\}_{x \in (S(\underline{K}) - \underline{K})}$$

mit Werten in der Prägarbe $S(\underline{K})\, \mathcal{M}/J$ seien unter $\bar{\alpha}$ Bild der meromorphen Funktionen h_{II} bzw. m_{II}: $S(\underline{K}) \to \bar{\mathbb{C}}$.

Auf der $\mathcal{O}(S(Y_0))$- bzw. $\mathcal{M}(S(Y_0))$-konvexen Hülle L von $\overline{Y_2}$ unterscheidet sich f von m_I bzw. m_{II} nach Konstruktion nur um einen Summanden d_i, i = I,II, aus J(L), der sich als Produkt $g_i \cdot h_i$ einer holomorphen Funktion $g_i \in \mathcal{O}(L)$, i = I,II, mit $h_i \mid L$ darstellen läßt. Aus dem Approximationssatz von Weil-Oka-Cartan (siehe [5]) bzw. aus Satz 2 folgt zu jedem $\delta > 0$ die Existenz einer holomorphen Funktion $G_I \in \mathcal{O}(S(Y_0))$ bzw. einer meromorphen Funktion $G_{II} \in \mathcal{M}(S(Y_0))$, die

$$\| g_i - G_i \|_L < \delta$$

erfüllt, i = I,II. Wählt man

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\| h_i \|_L}, \quad i = I \text{ bzw. } i = II,$$

dann gilt für die meromorphe Funktion (i = I,II)

$$F_i := m_i \mid S(Y_2) + (G_i \mid S(Y_2)) \cdot (h_i \mid S(Y_2))$$

die Gleichung

$$f(x) - F_i(x) = f(x) - m_i(x) + m_i(x) - F_i(x) = d_i(x) - G_i(x) \cdot h_i(x) = (g_i(x) - G_i(x))\, h_i(x);$$

Insbesondere folgt

1. $(f \mid Y_2 - F_i \mid Y_2)$ ist holomorph, i = I,II.
2. $f \mid (X_{\pi(x)} \cap Y) - F_i \mid (X_{\pi(x)} \cap Y)$ verschwindet in denjenigen Punkten $x \in Y_2$ von höherer Ordnung als $p(x) := \mathrm{ord}_x(f \mid (X_{\pi(x)} \cap Y))$, in denen f holomorph und $p(x) > 1$ ist. Dazu sind die ψ_x nämlich geeignet definiert. Der Exponent 2 dort ist dabei für das Verschwinden von hinreichend hoher Ordnung verantwortlich.
3. $|f(x) - F_i(x)| \leq |g_i(x) - G_i(x)| \, \|h_i\|_L < \epsilon$ für alle $x \in Y_2$, i = I,II.

Damit ist der Beweis zu Hilfssatz 7 beendet.

Die Konstruktion der im Hauptsatz verlangten Transformationsabbildungen u_i wird nun schrittweise durchgeführt. Wir gliedern dabei in Form von Hilfssätzen.

Wenn $z = (z_1,\ldots,z_{n+1})$ und $w = (w_1,\ldots,w_{n+1})$ Punkte in $\mathbb{C}^{n+1}$ sind, dann bezeichne z' bzw. w' die n-tupel $(z_1,\ldots,z_n)$ bzw. $(w_1,\ldots,w_n)$. Mit $r = (r', r_{n+1}) = (r_1,\ldots,r_n,r_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ notieren wir ein (n+1)-tupel von positiven reellen Zahlen.

Hilfssatz 8: Es seien $F, f_i: \Delta^{n+1}(w,r) \to \mathbb{C}$, i = 1,2,..., holomorphe Funktionen mit den Potenzreihenentwicklungen

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z') \, (z_{n+1} - w_{n+1})^k$$

und

$$f_i(z) = \sum_{k=o}^{\infty} b_{i,k}(z') \, (z_{n+1}-w_{n+1})^k, \quad i=1,2,\ldots$$

Ferner sollen die F, f_i folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Folge $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\Delta^{n+1}(w;r)$ kompakt gegen F.
2. Es gibt eine ganze Zahl $q > 1$ derart, daß

$$a_o(z') = b_{i,o}(z')$$

$$a_k(z') = b_{i,k}(z') = 0, \quad 1 \leq k < q$$

$$a_q(z') = b_{i,q}(z') \neq 0$$

gilt für alle $z' \in \Delta^n(w';r')$ und alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann existieren ein $s = (s_1,\ldots,s_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ mit $s < r$ (d.h. $s_\nu < r_\nu$ für $1 \leq \nu \leq n+1$) sowie injektive holomorphe Abbildungen

$$T_i: \ \Delta^{n+1}(w;s) \to \Delta^{n+1}(w;r), \ i=1,2,\ldots,$$

die

$$F \circ T_i = f_i \mid \Delta^{n+1}(w;s)$$

erfüllen und kompakt gegen die Inklusion $\Delta^{n+1}(w;s) \to \Delta^{n+1}(w;r)$ konvergieren.

Beweis: Auf $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_q(w')| < |a_q(w')|\}$ werde ein Zweig der q-ten Wurzel festgelegt. Sei

$$\varphi(z) := \sum_{l=o}^{\infty} a_{q+l}(z') \, (z_{n+1}-w_{n+1})^l .$$

Es existiert ein $s^{(1)} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ so, daß $s^{(1)} < r$ und

$$\varphi(\Delta^{n+1}(w;s^{(1)})) \subset B$$

gilt. Die holomorphe Abbildung

$$G\colon \Delta^{n+1}(w;s^{(1)}) \to \mathbb{C}^{n+1},$$

definiert durch

$$G(z) = (z',(z_{n+1}-w_{n+1})\sqrt[q]{\varphi(z)}^{-1})$$

ist in $\Delta^{n+1}(w;s^{(2)})$ injektiv, falls man $s^{(2)} < s^{(1)}$ geeignet aus $\mathbb{R}_+^{n+1}$ wählt. Es gibt ein $s^{(3)} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $s^{(3)} < s^{(2)}$, und eine injektive holomorphe Abbildung

$$H\colon \Delta^{n+1}(w;s^{(3)}) \to \Delta^{n+1}(w;s^{(1)}),$$

die die Gleichung

$$G \cdot H = id_{\Delta^{n+1}(w;s^{(3)})}$$

befriedigt. Sei

$$\chi_i(z) := \sum_{l=0}^{\infty} b_{i,q+l}(z')\,(z_{n+1}-w_{n+1})^l .$$

Aus den Voraussetzungen unter den Punkten 1 und 2 folgt, daß $\sqrt[q]{\chi_i(z)}$, $i=1,2,\ldots$, in $\Delta^{n+1}(w;s^{(4)})$, bei geeignetem $s^{(4)} < s^{(3)}$ aus $\mathbb{R}_+^{n+1}$, wohlerklärt ist und kompakt gegen $\sqrt[q]{\varphi(z)}$ konvergiert. Insbesondere ist die Abbildung

$$T_i(z) := H(z',(z_{n+1}-w_{n+1})\sqrt[q]{\chi_i(z)})$$

für $i \in \mathbb{N}$ und genügend kleines $s^{(5)} < s^{(4)}$ aus $\mathbb{R}_+^{n+1}$ in $\Delta^{n+1}(w;s^{(5)})$ wohlerklärt und injektiv. Wir setzen $s := s^{(5)}$ und bezeichnen mit p_{n+1} die Projektion

$$p_{n+1} : \Delta^{n+1}(w;r) \to \Delta^1(w_{n+1};r_{n+1}).$$

Für $z' \in \Delta^n(w';s')$ definieren wir

$$G_{z'} := p_{n+1}(G \mid (\{z'\} \times \Delta^1(w_{n+1};s^{(1)}_{n+1}))),$$

$$H_{z'} := p_{n+1}(H \mid (\{z'\} \times \Delta^1(w_{n+1};s^{(3)}_{n+1}))),$$

$$T_{i,z'} := p_{n+1}(T_i \mid (\{z'\} \times \Delta^1(w_{n+1};s_{n+1}))).$$

Dann gilt:

$$F(T_i(z)) =$$
$$a_o(z') + (T_{i,z'}(z)-w_{n+1})^q \ \varphi(z',T_{i,z'}(z)) =$$
$$a_o(z') + (G_{z'}(z',T_{i,z'}(z)))^q =$$
$$a_o(z') + G_{z'}(z',H_{z'}(z',(z_{n+1}-w_{n+1}) \sqrt[q]{\chi_i(z)}))^q =$$
$$a_o(z') + ((z_{n+1}-w_{n+1}) \sqrt[q]{\chi_i(z)})^q$$
$$b_{i,o}(z') + (z_{n+1}-w_{n+1})^q \ \chi_i(z) =$$
$$f_i(z) \quad \text{für } z \in \Delta^{n+1}(w;s) \quad \text{und } i \in \mathbb{N}.$$

Unmittelbar aus der Definition der T_i und aus Eigenschaft 1 folgt, daß die $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen die Inklusion

$$\Delta^{n+1}(w;s) \to \Delta^{n+1}(w;r)$$

konvergieren. Die T_i leisten also das Gewünschte.

Hilfssatz 9: $D \subset \mathbb{C}^n$ und $E \subset \mathbb{C}$ seien Gebiete, $D_o \subset D$ und $E_o \subset E$ seien relativ kompakte Teilgebiete, F und f_i, i = 1,2,..., seien holomorphe Funktionen $D \times E \to \mathbb{C}$. Die Folge der f_i konvergiere kompakt gegen F,

und $F \mid (\{y\} \times E)$ sei für alle $y \in D$ lokal injektiv. Dann existieren ein $j_o \in \mathbb{N}$ und injektive holomorphe Abbildungen

$$S_{j_o+k} : D_o \times E_o \to D \times E ,$$

$k = 1,2,\ldots$, die kompakt gegen die Inklusion $D_o \times E_o \to D \times E$ konvergieren und die Beziehung

$$F \cdot S_{j_o+k} = f_{j_o+k} \mid (D_o \times E_o)$$

erfüllen.

Beweis: Es lassen sich zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $i_o \in \mathbb{N}$ und Punkte $z_1,\ldots,z_m \in E$ mit folgenden Eigenschaften finden:

1. $z_1,\ldots,z_m \in \overline{E_\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : (\min_{x \in E_o} |z-x|) \leq \varepsilon\}$
2. $\overline{E_\varepsilon} \subset V := \bigcup_{\mu=1}^{m} \Delta^1(z_\mu, \frac{\varepsilon}{2})$
3. $\overline{E_{2\varepsilon}} \subset E$
4. Seien $x_1,x_2 \in E_{2\varepsilon}$ und $y \in \overline{D_o}$. Dann folgt aus $|x_1-x_2| < 3\varepsilon$ und $F(y,x_1) = F(y,x_2)$ daß $x_1=x_2$ gilt. Ebenso soll dies aus $|x_1-x_2| < 3\varepsilon$ und $f_i(y,x_1) = f_i(y,x_2)$ für $i > i_o$ folgen.
5. Zu jedem $i > i_o$ und $(y,z) \in \overline{D_o} \times \Delta^1(z_\mu;\frac{\varepsilon}{2})$ existiert genau ein $(y,z^{(\mu,i)}) \in \overline{D_o} \times \Delta^1(z_\mu;\varepsilon)$ mit $F(y,z) = f_i(y,z^{(\mu,i)})$, $1 \leq \mu \leq m$.

Für $1 \leq \mu \leq m$ und $i > i_o$ werden durch die Zuordnung

$$(y,z) \mapsto (y,z^{(\mu,i)})$$

Abbildungen

$$r_{\mu,i}: D_o \times \Delta^1(z_\mu; \tfrac{\varepsilon}{2}) \to D_o \times \Delta^1(z_\mu;\varepsilon)$$

definiert. $r_{\mu,i}$ ist holomorph, weil

$$\psi_{\mu,i}(y,z) := (y,f_i(y,z))$$

für $(y,z) \in (D_o \times \Delta^1(z_\mu;\varepsilon))$ und $i > i_o$ injektiv ist, und daher

$$r_{\mu,i}(y,z) = \psi_{\mu,i}^{-1}(y,F(y,z))$$

für $(y,z) \in (D_o \times \Delta^1(z_\mu; \tfrac{\varepsilon}{2}))$ gilt.

Die $r_{\mu,i}$, $\mu=1,\ldots,m$, sind für festes $i > i_o$ holomorphe Fortsetzungen voneinander; denn für zwei verschiedene $\mu_1,\mu_2 \in \{1,\ldots,m\}$, für

$$(y,z) \in ((D_o \times \Delta^1(z_{\mu_1}; \tfrac{\varepsilon}{2})) \cap (D_o \times \Delta^1(z_{\mu_2}; \tfrac{\varepsilon}{2})))$$

und für $(y,z^{(\mu_1,i)}) = r_{\mu_1,i}(y,z)$, $1 = 1,2$, gilt:

$$|z^{(\mu_1,i)} - z^{(\mu_2,i)}| \leq$$
$$|z^{(\mu_1,i)} - z_{\mu_1}| + |z_{\mu_1} - z_{\mu_2}| + |z^{(\mu_2,i)} - z_{\mu_2}| <$$
$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

und

$$f_i(y,z^{(\mu_1,i)}) = f_i(r_{\mu_1,i}(y,z)) = f_i(\psi_{\mu_1,i}^{-1}(y,F(y,z))) =$$

$$= f_i(\psi_{\mu_1,i}^{-1}(y,f_i(y,z^{(\mu_1,i)}))) = f_i(y,z^{(\mu_1,i)}) =$$

$$= F(y,z) = \ldots = f_i(y,z^{(\mu_2,i)}),$$

d.h. nach Eigenschaft 4 ist

$$r_{\mu_1,i}(y,z) = (y,z^{(\mu_1,i)}) = (y,z^{(\mu_2,i)}) = r_{\mu_2,i}(y,z).$$

Sei also $R_i: D_o \times V \to D \times E$ definiert durch

$$R_i(y,z) := r_{\mu,i}(y,z) \quad \text{für } (y,z) \in D_o \times \Delta^1(z_\mu; \tfrac{\varepsilon}{2}),$$

$1 \leq \mu \leq m, \quad i > i_o.$

Wir behaupten, daß die Abbildungen R_i injektiv sind. Zum Beweis sei (y_1,x_1) und (y_2,x_2) aus $D_o \times V$ und es gelte

$$R_i(y_1,x_1) = R_i(y_2,x_2) =: (y,x).$$

Daraus folgt $y_1 = y_2 = y$ und

$$F(y,x_1) = f_i(R_i(y_1,x_1)) = f_i(R_i(y_2,x_2)) = F(y,x_2),$$

sowie bei geeignetem μ_1 bzw. $\mu_2 \in \{1,\ldots,m\}$:

$$|x_1 - x_2| \leq$$

$$|x_1 - x^{(\mu_1,i)}| + |x^{(\mu_1,i)} - x^{(\mu_2,i)}| + |x_2 - x^{(\mu_2,i)}| <$$

$$\tfrac{3}{2}\varepsilon + 0 + \tfrac{3}{2}\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Wegen Eigenschaft 4 gilt dann $x_1 = x_2$, insgesamt also $(y_1,x_1) = (y_2,x_2)$.

Die Abbildungen R_i, $i > i_o$, konvergieren in $D_o \times V$ kompakt gegen die Inklusion $D_o \times V \to D \times E$, wie man aus folgender Tatsache erkennt: Für beliebiges, allerdings hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, und für alle $z \in \Delta^1(z_\mu; \frac{\varepsilon}{2})$, $\mu \in \{1,\ldots,m\}$, gilt

$$|z - z^{(\mu,i)}| < \frac{3}{2}\varepsilon .$$

Es existiert ein $j_o \in \mathbb{N}$, $j_o \geq i_o$, derart, daß für alle $i > j_o$ die Relation

$$R_i(D_o \times V) \supset D_o \times E_o$$

besteht. Sei für $k = 1,2,\ldots$

$$S_{j_o+k} : D_o \times E_o \to D \times E$$

diejenige injektive holomorphe Abbildung, die man durch Umkehrung von R_{j_o+k} und Beschränkung auf $D_o \times E_o$ erhält. Natürlich konvergiert die Folge der S_{j_o+k} kompakt gegen die Inklusion $D_o \times E_o \to D \times E$, und man hat wegen Eigenschaft 5 die Beziehung

$$F(S_{j_o+k}(y,z)) = f_{j_o+k}(y,z)$$

für alle $(y,z) \in D_o \times E_o$ und $k \in \mathbb{N}$.

Hilfssatz 10: $F, f_i : \Delta^{n+1}(0;1) \to \bar{\mathbb{C}}$, $i = 1,2,\ldots$, seien meromorphe Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. $F - f_i$, $i \in \mathbb{N}$, ist holomorph in $\Delta^{n+1}(0;1)$.

2. Die Folge $\{F - f_i\}_{i=1,2,\ldots}$ konvergiert kompakt in

$\Delta^{n+1}(0;1)$ gegen die Konstante 0.

3. Für kein $z' \in \Delta^n(0;1)$ liegt die "Faser" $\{z'\} \times \Delta^1(0;1)$ in der Menge der Unbestimmtheitsstellen von F.

4. Seien $F_{z'}$ und $f_{i,z'}$ die Beschränkungen von f bzw. f_i auf $\{z'\} \times \Delta^1(0;1)$. Gilt $p := \operatorname{ord}_{(z',z_{n+1})}(F_{z'}) > 1$ für $(z',z_{n+1}) \in \{z'\} \times \Delta^1(0;1)$, so verschwindet $(F_{z'} - f_{i,z'})$ in (z',z_{n+1}) mindestens von der Ordnung $p + 1$.

5. $F_{0'}$ ist nicht konstant.

Dann existieren ein $\rho \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\rho < 1$, und für $i > i_o$ injektive holomorphe Abbildungen

$$R_i: \Delta^{n+1}(0;\rho) \to \Delta^{n+1}(0;1),$$

die kompakt gegen die Inklusion $\Delta^{n+1}(0;\rho) \to \Delta^{n+1}(0;1)$ konvergieren und die Gleichungen

$$F \cdot R_i = f_i \mid \Delta^{n+1}(0;\rho), \quad i > i_o,$$

erfüllen.

Beweis: Es existiert ein $\alpha = (\alpha',\alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\alpha < 1$, derart, daß für alle

$z = (z',z_{n+1}) \in (\Delta^n(0;\alpha') \times \{x \in \mathbb{C} : |x| = \alpha_{n+1}\})$

$$\operatorname{ord}_{(z',z_{n+1})}(F_{z'}) = 1$$

gilt. Zu jedem Punkt $x_{n+1} \in \overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})}$ und jeder offenen

Teilmenge W von $\Delta^n(0;\alpha')$ gibt es einen in $\Delta^{n+1}(0;(\alpha',1))$ liegenden Polyzylinder $\Delta^{n+1}(x;\beta)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $x = (x',x_{n+1})$ für ein $x' \in W$.

2. $\Delta^n(x';\beta') \subset W$.

3. Sei $p := \operatorname{ord}_{(w',w_{n+1})} (F_{w'})$ die Ordnung von $F_{w'}$ in einem beliebigen Punkt $w = (w',w_{n+1}) \in \Delta^{n+1}(x;\beta)$. Dann besitzen die Koeffizienten $a_j(z')$ der Laurent-Entwicklung

$$F(z) = \sum_{j=c}^{\infty} a_j(z') \, (z_{n+1}-w_{n+1})^j$$

von F im Punkt $w = (w',w_{n+1})$, deren Index $\leq p$ ist, entweder keine Nullstellen für $z' \in \Delta^n(x',\beta')$, oder sie verschwinden identisch.

Wendet man diese Aussage zunächst auf $\Delta^n(0;\alpha')$ als W und dann iteriert ($k = 1,2,\ldots$) auf $\Delta^n({}^{(k)}x';{}^{(k)}\beta')$ als W an, wobei man beim (k+1)-ten Iterationsschritt den neuen Punkt ${}^{(k+1)}x_{n+1} \in \overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})}$ stets außerhalb der bereits gefundenen Kreisscheiben $\Delta^1({}^{(\kappa)}x_{n+1},{}^{(\kappa)}\beta_{n+1})$, $\kappa = 1,\ldots,k$, wählt, so bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, weil $\overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})}$ schon mit endlich vielen Kreisscheiben $\Delta^1({}^{(\kappa)}x_{n+1};{}^{(\kappa)}\beta_{n+1})$ überdeckt ist. In $\Delta^n(0;\alpha')$ existiert also ein y' folgender Art:

Wenn $(y',y_{n+1}^{(1)}),\ldots,(y',y_{n+1}^{(l)})$ die endlich vielen Punkte von $\{y'\} \times \overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})}$ sind, in denen

$$p_\ell := \operatorname{ord}_{(y',y_{n+1}^{(\ell)})} (F_{y'}) \neq 1$$

gilt, und wenn

$$F(z) = \sum_{j=c_\ell}^{\infty} a_j^{(\ell)}(z') \quad (z_{n+1}-y_{n+1}^{(\ell)})^j$$

die Laurent-Entwicklung von F in $(y',y_{n+1}^{(\ell)})$ ist, $1 \leq \ell \leq l$, dann gilt entweder

$$c_\ell < 0 \quad \text{und} \quad a_{c_\ell}^{(\ell)}(z') \not\equiv 0,$$

oder

$$c_\ell \geq 0,\ a_m^{(\ell)}(z') \equiv 0 \text{ für } m = 1,\dots,p_\ell-1$$

$$\text{und } a_{p_\ell}^{(\ell)}(z') \not\equiv 0.$$

Falls $c_\ell < -1$ ist, gibt es einen Polyzylinder mit Zentrum $(y',y_{n+1}^{(\ell)})$, in dem die Funktionen $\frac{1}{F}$ und $\frac{1}{f_i}$, $i = 1,2,\dots$, holomorph, und die Voraussetzungen von Hilfssatz 8 erfüllt sind. Gleiches gilt für F und f_i, $i \in \mathbb{N}$, falls $c_\ell \geq 0$ ist. Bei $c_\ell = -1$ läßt sich Hilfssatz 9 auf die in einer geeigneten Umgebung von $(y',y_{n+1}^{(\ell)})$ holomorphen Funktionen $\frac{1}{F}$ und $\frac{1}{f_i}$ anwenden.

Insgesamt folgt für $1 \leq \ell \leq l$ die Existenz eines hinreichend kleinen Polyradius $\gamma \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, eines $i_1 \in \mathbb{N}$ und injektiver holomorpher Abbildungen

$$r_{i,\ell} : \Delta^{n+1}((y',y_{n+1}^{(\ell)});\gamma) \to \Delta^n(y';\gamma') \times \Delta^1(0;1),$$

$i > i_1$, die kompakt gegen die Inklusion

$$\Delta^{n+1}((y';y_{n+1}^{(\ell)});\gamma) \to \Delta^n(y';\gamma') \times \Delta^1(0;1)$$

konvergieren und die Gleichung

$$F(r_{i,\ell}(z)) = f_i(z)$$

für alle $z \in \Delta^{n+1}((y',y_{n+1}^{(\ell)});\gamma)$ befriedigen.

Wir setzen

$$\overline{E_o} := \overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})} - (\overline{\Delta^1(0;\alpha_{n+1})} \cap \bigcup_{\ell=1}^{l} \Delta^1(y_{n+1}^{(\ell)}; \frac{\gamma_{n+1}}{2})).$$

Von vorneherein sei γ so klein gewählt, daß $\overline{E_o}$ zusammenhängend ist, und die Ordnung der Beschränkung von F auf $\{z'\} \times \overline{E_o}$ nur den Wert 1 besitzt für alle $z' \in \overline{\Delta^n(y';\gamma')}$. Hilfssatz 9 liefert für $i > i_2 \geq i_1$ injektive holormorphe Abbildungen

$$s_i : \Delta^n(y';\gamma') \times E_o \to \Delta^n(y';\gamma') \times \Delta^1(0;1),$$

die kompakt gegen die Inklusion

$$\Delta^n(y';\gamma') \times E_o \to \Delta^n(y';\gamma') \times \Delta^1(0;1)$$

konvergieren und

$$F \cdot s_i = f_i \mid (\Delta^n(y';\gamma') \times E_o)$$

erfüllen.

Es existiert ferner eine offene Umgebung V von $\overline{\Delta^n(0;\alpha')} \times \{x \in \mathbb{C} : |x| = \alpha_{n+1}\}$, so daß $F \mid (\{z'\} \times (\Delta^1(0;1) \cap V))$ für alle $z' \in \Delta^n(0;\alpha')$ lokal injektiv ist. Wenn V_o ein relativ kompakt in V liegendes Gebiet ist, das $\overline{\Delta^n(0;\alpha')} \times \{x \in \mathbb{C} : |x| = \alpha_{n+1}\}$ enthält, dann kann man ebenfalls mit Hilfssatz 9 auf die Existenz injektiver holomorpher Abbildungen

$$t_i : V_o \to \Delta^{n+1}(0;(\alpha',1))$$

schließen, falls i hinreichend groß ist, etwa $i > i_3 \geq i_2$.

Die t_i sollen dabei kompakt gegen die Inklusion $V_o \to \Delta^{n+1}(0;(\alpha',1))$ konvergieren und die Beziehung $F \cdot t_i = f_i \mid V_o$ realisieren.

Um zu zeigen, daß die Abbildungen $r_{i,\ell}(1 \leq \ell \leq 1)$, s_i, und t_i bei festem i für fast alle i holomorphe Fortsetzungen voneinander sind, bezeichnen wir mit $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zwei Funktionsfolgen aus der Menge

$$\{\{r_{i,\ell}\}_{i\in\mathbb{N},1\leq\ell\leq 1}, \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}\},$$

die in einer Umgebung U eines Punktes $x = (x', x_{n+1})$ der Vereinigung

$$T := \left(\bigcup_{\ell=1}^{1} \Delta^{n+1}((y', y_{n+1}^{(\ell)});\gamma)\right) \cup (\Delta^n(y';\gamma') \times E_o) \cup V_o$$

der Definitionsgebiete der $r_{i,\ell}$, s_i, t_i definiert sind. Ohne Einschränkung sei

$$\operatorname{ord}_{(x',x_{n+1})}(F_{x'}) = 1$$

(sonst wähle man ein benachbartes x). Die Folgen $\{\theta_i(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ und $\{\eta_i(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ konvergieren gegen x. Also muß

$$\theta_i(x) = \eta_i(x)$$

bei genügend großem $i \in \mathbb{N}$ gelten. Aus der Beziehung

$$(F \cdot \theta_i)(y) = f_i(y) = (F \cdot \eta_i)(y),$$

die für alle Punkte y der Umgebung U von x besteht, ergibt sich

$$(F \cdot \theta_i \cdot (\eta_i)^{-1})(y) = F(y).$$

Die Abbildung

$$(y', y_{n+1}) \longmapsto (y', F(y', y_{n+1}))$$

ist in einer Umgebung von x injektiv. Demnach stimmt $\theta_i \cdot (\eta_i)^{-1}$ mit der Identität überein, und θ_i ist holomorphe Fortsetzung von η_i.

Es seien für $i > i_4 \geq i_3$

$$S_i' : T \to \Delta^1(0;1)$$

die je nach Definitionsbereich durch

$S_i' = p_{n+1} \cdot r_{i,\ell}$ bzw. $S_i' = p_{n+1} \cdot s_i$ bzw. $S_i' = p_{n+1} \cdot t_i$

definierten, auch in den Überlappungsgebieten wohlerklärten Funktionen, wobei p_{n+1} die Projektion auf die (n+1)-te Koordinate bezeichne. Nach dem Hartogs'schen Kontinuitätssatz lassen sich die S_i' zu holomorphen Funktionen

$$S_i : \Delta^{n+1}(0;\alpha) \to \Delta^1(0;1)$$

fortsetzen. Es folgt für die holomorphen Abbildungen

$$R_i : \Delta^{n+1}(0;\alpha) \to \Delta^{n+1}(0;1),$$

die durch

$$R_i(z) = R_i(z', z_{n+1}) = (z', S_i(z))$$

gegeben sind, daß für $i > i_4$

$$F \cdot R_i = f_i \mid \Delta^{n+1}(0;\alpha)$$

gilt. Natürlich konvergieren die R_i kompakt gegen die Inklusion $\Delta^{n+1}(0;\alpha) \to \Delta^{n+1}(0;1)$.

Wir kommen jetzt zum

Beweis des Hauptsatzes:

Y_2 sei ein relativ kompaktes Teilgebiet von Y_o, das Y_1 einschließlich Rand enthält. Man kann eine Folge meromorpher Funktionen

$$f_i : S(Y_2) \to \bar{\mathbb{C}}$$

konstruieren, die in Y_2 gleichmäßig gegen die vorgegebene Funktion

$$f : Y \to \bar{\mathbb{C}}$$

konvergieren und in Y_2 die Eigenschaften 1 und 2 der Funktion F von Hilfssatz 7 besitzen.

$\overline{Y_1}$ kann mit endlich vielen offenen Umgebungen $U_1,\ldots,U_m$ überdeckt werden, in denen biholomorphe Abbildungen

$$\Omega_\mu : U_\mu \to \Delta^{n+1}(0;1)$$

erklärt sind. Dabei gelte für $x \in U_\mu$:

$$\Omega_\mu(U_\mu \cap \pi^{-1}(\pi(x))) = \{(\Omega_\mu(x))'\} \times \Delta^1(0;1),$$

wobei der Apostroph die Projektion auf $\Delta^n(0;1)$ bedeute (dim X = n + 1, $1 \leq \mu \leq m$).

Die Sonderfälle, wo f auf $U_\mu \cap \pi^{-1}(\pi(x))$ für ein $x \in U_\mu$, $\mu \in \{1,\ldots,m\}$, konstant oder zur Gänze unbestimmt ist, führen bei kompakten Fasern (Fall II) zu der im Beweis von Hilfssatz 7 abgehandelten trivialen Situation. Im Fall I (nichtkompakte Fasern) folgt aus der Relation $R \cup Y_o \subset Y$, daß R die Faser $X_{\pi(x)}$ trifft und deshalb keiner der Sonderfälle vorkommen darf. Im allgemeinen kann man also Hilfssatz 10 auf die vermöge Ω_μ nach $\Delta^{n+1}(0;1)$ gelifteten Funktionen f und f_i, $i \in \mathbb{N}$, anwenden. Die injektiven holomorphen Abbildungen

$$(\Omega_\mu)^{-1} \cdot R_{\mu,i} \cdot \Omega_\mu$$

sind in den Urbildern

$$\Omega_\mu{}^{-1}(\Delta^{n+1}(0;\rho^{(\mu)}))$$

der in $\Delta^{n+1}(0;1)$ enthaltenen Polyzylinder aus Hilfssatz 10 mit Zentrum 0 und Polyradien $\rho^{(\mu)}$ erklärt und erfüllen die Beziehung

$$f(\Omega_\mu{}^{-1}(R_{\mu,i}(\Omega_\mu(x)))) = f_i(x)$$

in allen Punkten $x \in \Omega_\mu{}^{-1}(\Delta^{n+1}(0;\rho^{(\mu)}))$, $(1 \leq \mu \leq m)$, falls nur i hinreichend groß ist. Die Überdeckung sei so angelegt, daß schon

$$\bigcup_{\mu=1}^{m} \Omega_\mu{}^{-1}(\Delta^{n+1}(0;\rho^{(\mu)}))$$

ganz $\overline{Y_1}$ enthält. Die bis jetzt lokal definierten Transfor-

mationsabbildungen sind holomorphe Fortsetzungen voneinander, wie man aus gleichen Argumenten wie im Beweis zu Hilfssatz 10 erkennt. Sie bilden eine Folge injektiver holomorpher Abbildungen

$$u_i : Y_1 \to (S(Y_1) \cap Y_o), \quad i = 1,2,\ldots,$$

die kompakt gegen die Inklusion $Y_1 \to (S(Y_1) \cap Y_o)$ konvergiert. Zweitens sind die u_i fasertreu, d.h.

$$\pi(u_i(x)) = \pi(x) \quad \text{für alle } x \in Y_1.$$

Bei entsprechender Formulierung besitzen nämlich alle Transformationsabbildungen der Hilfssätze 8, 9 und 10 diese Eigenschaft, die sich jetzt auf u_i überträgt. Schließlich erfüllen die u_i Forderung 3 aus Satz 3:

$$(f \mid (S(Y_1) \cap Y_o)) \cdot u_i = f_i \mid Y_1.$$

Der Hauptsatz ist bewiesen.

Corollar 2: X sei eine Riemannsche Fläche, Y ein Gebiet in X, Y_o ein relativ kompaktes Teilgebiet von Y, und

$$f : Y \to \bar{\mathbb{C}}$$

eine meromorphe Funktion.

Dann existieren injektive holomorphe Abbildungen

$$u_i : Y_o \to Y, \; i = 1,2,\ldots,$$

die kompakt gegen die Inklusion $Y_o \to Y$ konvergieren und

die Eigenschaft besitzen, daß die Funktion

$$(f \cdot u_i) : Y_o \to \bar{\mathbb{C}}$$

Beschränkungen meromorpher Funktionen

$$f_i : X \to \bar{\mathbb{C}}$$

sind, $i \in \mathbb{N}$.

Beweis: Um Anschluß an den Hauptsatz zu gewinnen, betrachten wir anstelle von X die Familie $\pi:(\{x_o\} \times X) \to \{x_o\}$ Riemannscher Flächen, bestehend aus einer Faser über $x_o \in \mathbb{C}$. Durch eine eventuelle Vergrößerung von $\{x_o\} \times Y_o$ können die Voraussetzungen aus Satz 3 über den Rand R von $\{x_o\} \times Y_o$ hergestellt werden. Mit gleicher Technik läßt sich eine Einschränkung des Definitionsgebietes der Transformationsabbildungen auf einen relativ kompakten Teil von $\{x_o\} \times Y_o$ vermeiden. Voraussetzungen über die Basismannigfaltigkeit $\{x_o\}$ sind überflüssig. Ist die Faser kompakt, dann folgt aus der Bemerkung zu Definition 5, daß jeder offene Teil von $\{x_o\} \times X$ relativ zu $\{x_o\} \times X$ meromorph-konvex ist. In diesem Fall ist also die Gültigkeit des Corollars nachgewiesen. Eine nichtkompakte Riemannsche Fläche ist bekanntlich Steinsch. Allerdings ist ein offener Teil von $\{x_o\} \times X$ im allgemeinen nicht $\mathcal{O}(\{x_o\} \times X)$-konvex. Aber diese Bedingung für $\{x_o\} \times Y_o$ würden wir nur zur Anwendung des Approximationssatzes von Weil-Oka-Cartan benötigen. Aus Satz 13 von [1]

geht jedoch hervor, daß bei Approximation durch meromorphe Funktionen keine Voraussetzungen über das Gebiet $\{x_o\} \times Y_o$ gemacht werden müssen.

Mit diesem Hinweis ist der Beweis erbracht.

IV. ANHANG

Zur Funktionentheorie auf Familien $\pi : X \to M$ kompakter Riemannscher Flächen geben wir in diesem Anhang drei weitere Sätze an. Zunächst wird die Frage behandelt, ob man alle holomorphen Abbildungen $f : X_t \to \bar{\mathbb{C}}$ auf einer beliebigen Faser X_t der Familie X durch meromorphe Beschränkung der meromorphen Funktionen $F : X \to \bar{\mathbb{C}}$ auf die Faser X_t erhalten kann [3]. Besitzt dabei F auf X_t die endlich vielen Unbestimmtheitsstellen $y_1, \ldots, y_r$, so versteht man unter der meromorphen Beschränkung $F|_m X_t$ von F auf X_t die (existierende) meromorphe Fortsetzung der holomorphen Beschränkung $F|(X_t - \bigcup_{\rho=1}^{r} y_\rho)$ auf ganz X_t. Es gilt nun folgender

Satz 4: X und M seien zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten, $\pi : X \to M$ eine lokal-lokaltriviale holomorphe Familie kompakter Riemannscher Flächen, X_{t_o}, $t_o \in M$, eine Faser der Familie und $f : X_{t_o} \to \bar{\mathbb{C}}$ eine holomorphe Abbildung.
Ist das Geschlecht g der Fasern verschieden von 1 und die Basismannigfaltigkeit M Steinsch, dann gibt es eine meromorphe Funktion $F : X \to \bar{\mathbb{C}}$ mit $F|_m X_{t_o} = f$.
Für $g = 1$ existieren eine offene Umgebung $U \subset M$ von t_o

---

3) Vergleiche [12], §13, wo Deformationen holomorpher Abbildungen mit Werten in projektiven Räumen betrachtet werden.

und eine holomorphe Abbildung $F : \pi^{-1}(U) \to \bar{\mathbb{C}}$ deren holomorphe Beschränkung auf X_{t_o} mit f übereinstimmt.

Beweis: Auf X sei $T_{X/M}$ das Geradenbündel der kontravarianten Tangentialvektoren, die in Punkten p von X von der Abbildung $\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} : \mathcal{O}_p \to \mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ erzeugt werden, wenn n+1 die komplexe Dimension von X ist und z_{n+1} die in den Fasern laufende Variable bedeutet. Die Garbe der Keime der Schnitte im dualen Geradenbündel $T^*_{X/M}$ ist die Garbe $\Omega_{X/M}$ der Keime der relativen holomorphen Differentialformen auf X. Auf einer Faser X_t, $t \in M$, bezeichne $\mathcal{O}_D$ die Garbe der meromorphen Funktionskeime, die Vielfaches eines Divisors $D : X_t \to \mathbb{Z}$ sind; Ω_t sei die Garbe der Keime der holomorphen Differentialformen auf X_t und Ω_D die Garbe meromorpher Differentialformen auf X_t, die Vielfaches von D sind.
Ist die vorgegebene Funktion $f : X_{t_o} \to \bar{\mathbb{C}}$ konstant, bleibt nichts zu beweisen. Seien $z_1,\ldots,z_m$ die endlich vielen Polstellen von f auf X_{t_o} mit den Vielfachheiten $n_1,\ldots,n_m$.
Als erstes betrachten wir den Fall, daß die Fasern das Geschlecht g > 1 besitzen. Vermöge

$$D_i(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z = z_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

werden m Divisoren $D_i : X_{t_o} \to \mathbb{Z}$, $i = 1,\ldots,m$, auf X_{t_o} angegeben. Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$\dim H^o(X_{t_o},\Omega_{D_i}) = \dim H^o(X_{t_o},\mathcal{O}_{-D_i}) - 1 + g - \text{grad } D_i = g-1 \geq 1,$$

weil $H^o(X_{t_o}, \mathcal{O}_{-D_i})$ wegen $g \neq 0$ nur die konstanten Funktionen enthält. Es lassen sich also von Null verschiedene holomorphe Differentialformen s_i, $i = 1,\ldots,m$, aus $H^o(X_{t_o}, \Omega_{D_i})$ wählen. Das Geschlecht g und damit $\dim H^o(X_t, \Omega_t)$ ist für alle Fasern X_t, $t \in M$, konstant. $\Omega_{X/M}$ ist π-platt. Das Corollar 1 ist anwendbar und die s_i, $i = 1,\ldots,m$ können auf ganz X zu relativen holomorphen Differentialformen $S_i \in H^o(X, \Omega_{X/M})$ fortgesetzt werden. Sei

$$n := \sum_{i=1}^{m} n_i$$

und $X/M\ T^{*n}$ die n-te Potenz von $X/M\ T^*$ im Sinne des Tensorproduktes für Geradenbündel. Die Garbe der Keime der holomorphen Schnitte in $X/M\ T^{*n}$ wird mit $\mathcal{O}(X/M\ T^{*n})$ bezeichnet. $\mathcal{O}(X/M\ T^{*n})$ ist π-platt. Wenn r_t ein holomorpher Schnitt aus $H^o(X_t, \mathcal{O}(X/M\ T^{*n})_t)$ ist, dessen Null- und Polstellen den Divisor $D_t : X_t \to \mathbb{Z}$ auf X_t, $t \in M$, liefern, dann ergibt sich

$$\mathcal{O}(X/M\ T^{*n})_t \cong \mathcal{O}_{-D_t} .$$

Es gilt

$$\operatorname{grad} D_t = 2n(g-1),$$

und wegen $g > 1$ und $n > 1$ erhält man

$$\dim H^1(X_t, \mathcal{O}(X/M\ T^{*n})_t) = \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{-D_t}) = 0$$

für alle $t \in M$. Satz 1 besagt, daß die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\dim H^o(X_t, \mathcal{O}(X/M\ T^{*n})_t) - \dim H^1(X_t, \mathcal{O}(X/M\ T^{*n})_t)$$

lokal konstant auf M ist. Folglich ist dim $H^o(X_t, \mathcal{O}(_{X/_M} T^{*n})_t)$ unabhängig von $t \in M$.

Die holomorphen Differentialformen $s_i \in H^o(X_{t_o}, \Omega_{D_i})$ sind so gewählt, daß

$$f \cdot \prod_{i=1}^{m} s_i^{n_i}$$

einen globalen holomorphen Schnitt im Geradenbündel $X/_M T^{*n} | X_{t_o}$ bildet. Mit dem Corollar 1 zeigt man, daß es einen Schnitt $T \in H^o(X, \mathcal{O}(_{X/_M} T^{*n}))$ gibt, der, auf X_{t_o} beschränkt, gleich $f \cdot \prod_{i=1}^{m} s_i^{n_i}$ ist. Der Quotient

$$T \;/\; \prod_{i=1}^{m} S_i^{n_i}$$

stellt eine meromorphe Funktion $F : X \to \overline{\mathbb{C}}$ dar, deren meromorphe Beschränkung auf X_{t_o} mit f übereinstimmt.

Wir kommen zum Fall <u>g = 0</u>. Sei X_t eine Faser der Familie $\pi : X \to M$ und $D_t : X_t \to \mathbb{Z}$ ein Divisor auf X_t mit den Eigenschaften

(*) $D_t(z) \leq 0$ für alle Punkte $z \in X_t$

und grad $D_t = -2$.

Es gilt (Riemann - Roch):

$$\dim H^o(X_t, \Omega_{D_t}) = \dim H^o(X_t, \mathcal{O}_{-D_t}) - 1 + g - \operatorname{grad} D_t = 1 .$$

Der Divisor einer meromorphen von Null verschiedenen Differen-

tialform $r_t \in H^0(X_t, \Omega_{D_t})$ besitzt den Grad $2(g-1) = -2$. Folglich ist r_t nullstellenfrei und r_t^{-1} ist globaler holomorpher Schnitt im Geradenbündel $X_{/M}\ T \mid X_t$ der kontravarianten Tangentialvektoren auf X_t. Die Garben $\mathcal{O}(X_{/M}\ T)_t := \mathcal{O}(X_{/M}\ T|X_t)$ und $\mathcal{O}_{D_t}$ auf der Faser X_t sind isomorph. Man errechnet

$$\dim H^0(X_t, \mathcal{O}(X_{/M}\ T)_t) = \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{D_t}) =$$

$$= \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{D_t}) + 1 - g - \operatorname{grad} D_t = 3,$$

weil $\dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{D_t})$ wegen $\operatorname{grad} D_t < -2(g-1) = 2$ verschwindet. $\dim H^0(X_t, \mathcal{O}(X_{/M}\ T)_t)$ ist also unabhängig von t in M.

Auf der Faser X_{t_o} werden spezielle Divisoren $D_i : X_{t_o} \to \mathbb{Z}$, $i = 1,\ldots,m$, durch

$$D_i(z) := \begin{cases} -2 & \text{für } z = z_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Sie besitzen die oben genannten Eigenschaften (*). Deshalb existieren nicht identisch verschwindende meromorphe Differentialformen $s_i \in H^0(X_{t_o}, \Omega_{D_i})$, derart, daß s_i^{-1}, $i = 1,\ldots,m$, globale holomorphe Schnitte im Geradenbündel $X_{/M}\ T|X_t$ sind. Die Garbe $\mathcal{O}(X_{/M}\ T)$ der Keime der holomorphen Schnitte im Geradenbündel $X_{/M}\ T$ der kontravarianten Tangentialvektoren längs der Fasern ist π-platt. Gemäß Corollar 1 können die $s_i^{-1} \in H^0(X_{t_o}, \mathcal{O}(X_{/M}\ T)_t)$ zu globalen holomorphen Schnitten S_i in $X_{/M}\ T$ fortgesetzt werden. n bezeichne wieder die Anzahl der Polstellen von f, die Vielfachheiten mitgezählt, und $X_{/M}\ T^n$ sei die n-te Potenz im Sinne des Tensorpro-

duktes des Geradenbündels $X/_M$ T. Wählt man auf einer beliebigen Faser X_t wieder den Divisor $D_t : X_t \to \mathbb{Z}$ mit der obigen Eigenschaft (*), erkennt man, daß die Garben $\mathcal{O}(X/_M\ T^n)_t$ und $\mathcal{O}_{D_t{}^n}$ isomorph sind und

$$\dim H^0(X_t,\mathcal{O}(X/_M\ T^n)_t) = \dim H^0(X_t,\mathcal{O}_{D_t{}^n}) =$$

$$= \dim H^1(X_t,\mathcal{O}_{D_t{}^n}) + 1 - g - \operatorname{grad} D_t{}^n = 1 + 2n$$

ist, für alle $t \in M$. Ferner ist $\mathcal{O}(X/_M\ T^n)$ π-platt und Corollar 1 läßt sich auf den holomorphen Schnitt

$$f \cdot \prod_{i=1}^{m} s_i^{-n_i} \in H^0(X_{t_o},\mathcal{O}(X/_M\ T^n)_t)$$

anwenden, der demnach zu einem globalen holomorphen Schnitt $R \in H^0(X,\mathcal{O}(X/_M\ T))$ fortgesetzt werden kann. Die Funktion

$$F := T \,/\, \prod_{i=1}^{m} S_i^{n_i}$$

ist auf ganz X definiert und meromorph. Ihre meromorphe Beschränkung auf X_{t_o} stimmt mit der gegebenen Funktion f überein.

Für den Fall $g = 1$ läßt sich die bisher benützte Methode nicht verwenden, weil die holomorphen Differentialformen auf der Faser X_{t_o} dann den Grad 0 haben und daher keine Nullstellen besitzen, mit denen man die Polstellen der auf X_{t_o} definierten Funktion f wegmultiplizieren könnte. Auf anderem Wege gelingt aber immerhin die holomorphe Fortsetzung von f in eine Schlauchumgebung von X_{t_o}.

Es existieren endlich viele Punkte $w_1,\ldots,w_r$ in der Faser X_{t_o} und offene Umgebungen $W_1,\ldots,W_r$ von $w_1,\ldots,w_r$ in X mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Menge $\{z_1,\ldots,z_m\}$ der Polstellen von f ist in $\{w_1,\ldots,w_r\}$ enthalten.

2) Es gibt eine offene Steinsche Umgebung U von t_o in M und biholomorphe Abbildungen $v_j : W_j \to U \times \Delta^1(0;1)$, die, falls p_1 die Projektion $U \times \Delta^1(0;1) \to U$ bezeichnet, den Bedingungen

$$\pi(x) = p_1(v_j(x)),\ x \in W_j$$

und

$$v_j(w_j) = (t_o,0)$$

genügen, $j = 1,\ldots,r$.

3) Die Vereinigung der $W_1,\ldots,W_r$ überdeckt die Schlauchumgebung $\pi^{-1}(U)$ von X_{t_o}.

4) Die Mengen W_k und $v_\ell^{-1}(U \times \{0\})$ sind disjunkt für $k,\ell \in \{1,\ldots,r\}$, $k \neq \ell$.

Es seien $p_2 : U \times \Delta^1(0;1) \to \Delta^1(0;1)$ die Projektion auf den zweiten Faktor des Kartesischen Produktes $U \times \Delta^1(0;1)$, n_i die Vielfachheiten der Polstellen z_i, $i = 1,\ldots,m$, von f in X_{t_o} und

$$\kappa_j := \begin{cases} n_i & \text{falls } w_j = z_i,\ i \in \{1,\ldots,m\} \\ 0 & \text{falls } w_j \neq z_i,\ i = 1,\ldots,m \end{cases}$$

für $j = 1,\ldots,r$.

Auf $\pi^{-1}(U)$ wird durch die Übergangsfunktionen

$$g_{k\ell} := \frac{(p_2 \cdot v_k)^{\kappa_k} \mid (W_k \cap W_\ell)}{(p_2 \cdot v_\ell)^{\kappa_\ell} \mid (W_k \cap W_\ell)} \in \mathcal{O}^*(W_k \cap W_\ell)$$

in den nichtleeren Durchschnitten $W_k \cap W_\ell$, $k,\ell \in \{1,\ldots,r\}$ ein Geradenbündel G definiert. Auf allen Fasern X_t, $t \in U$, ist ein Divisor $D_t : X_t \to \mathbb{Z}$ erklärt:

$$D_t(x) = \begin{cases} \kappa_j & \text{falls } p_2 \cdot v_j(x) = 0 \text{ für ein } j \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Garbe $\mathcal{O}(G)_t$ der Keime der holomorphen Schnitte in der Beschränkung $G \mid X_t$ des Geradenbündels G auf X_t, $t \in U$, ist isomorph zur Garbe $\mathcal{O}_{-D_t}$ auf X_t und man hat

$$\dim H^0(X_t, \mathcal{O}(G)_t) = \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{-D_t}) =$$

$$= \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{-D_t}) + 1 - g + \operatorname{grad} D_t = \text{constans},$$

weil $\operatorname{grad}(-D_t) < -2(g-1) = 0$ und deshalb $H^1(X_t, \mathcal{O}_{-D_t}) = 0$ ist $(t \in U)$.

Ferner ist die Schnittgarbe $\mathcal{O}(G)$ $\pi \mid \pi^{-1}(U)$-platt. Nach Corollar 1 läßt sich also der von

$$\bigcup_{j=1}^{r} \{f_x \cdot ((p_2 \cdot v_j)^{\kappa_j} \mid (X_{t_o} \cap W_j))_x\}_{x \in (X_{t_o} \cap W_j)}$$

induzierte holomorphe Schnitt in $G \mid X_{t_o}$ zu einem Schnitt $S \in H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}(G))$ fortsetzen. Sei T der von

$$\{(p_2 \cdot v_j)^{\kappa_j}\}_{j \in \{1,\ldots,r\}}$$

bestimmte globale holomorphe Schnitt in G. Der Quotient S/T stellt eine meromorphe Funktion $F : \pi^{-1}(U) \to \bar{\mathbb{C}}$ dar, deren holomorphe Beschränkung auf die Faser X_{t_o} definiert ist und die vorgegebene Funktion f ergibt.
Damit ist der Beweis von Satz 4 vollständig geführt.

Sei Y eine kompakte Riemannsche Fläche und $D : Y \to \mathbb{Z}$ ein nicht identisch verschwindender Divisor auf Y. Entfernt man den Divisor D aus Y, d.h. bildet man $Y - \{y \in Y \mid D(y) \neq 0\}$, erhält man eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, also eine Steinsche komplexe Mannigfaltigkeit. Bei Familien kompakter Riemannscher Flächen gilt folgende Verallgemeinerung dieses Tatbestandes:

Satz 5: X und M seien zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten, $\pi : X \to M$ eine lokal-lokaltriviale holomorphe Familie kompakter Riemannscher Flächen und $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ ein nichtleerer Divisor auf X, der keine Faser X_t ganz enthält. Dann ist die komplexe Mannigfaltigkeit X - D Steinsch.

Beweis: Wie Hilfssatz 4 besagt, trennen die in X meromorphen Funktionen aus $\mathcal{M}(X; X-D)$, die also holomorph in X - D sind, die Punkte von X - D. Daraus erkennt man, daß X - D holomorph separabel ist. Im Kapitel II wurde erläutert, daß zu D ein positiver Divisor $D^+ \in H^0(X, \mathcal{D}^+)$ existiert, dessen Nullstellenfläche mit der analytischen Menge A der Null-, Pol- und Unbestimmtheitsstellen von D übereinstimmt. Wir definieren

$$D_1 := (D^+)^{2g+1} \in H^0(X, \mathcal{D}^+),$$

wobei g das Geschlecht der Fasern von X bedeutet. Weil in A nach Voraussetzung keine ganze Faser X_t liegt, sind die Beschränkungen $D_1 \mid X_t$ auf allen Fasern wohlerklärt. Aus Hilfssatz 1 folgt für $t \in M$

$$\text{grad } (D_1 \mid X_t) = \text{constans} > 2(g-1).$$

Unter $\{g_x\}_{x \in X}$, $g_x \in \mathcal{O}_x$, wollen wir ein Repräsentantensystem von D_1 in X verstehen. Seien J^k die zwei kohärenten analytischen Modulgarben meromorpher Funktionskeime auf X, deren Halme in den Punkten $x \in X$ durch

$$J^k{}_x := \{m_x \in \mathcal{M}_x : (g_x{}^k \cdot m_x) \in \mathcal{O}_x\}$$

gegeben seien, k = 1,2. Ferner sei $g\mathcal{O}$ die kohärente analytische Modulgarbe auf X, deren Halme in $x \in X$ durch den Keim g_x über $\mathcal{O}_x$ erzeugt wird. Mit i seien die natürlichen Injektionen

$$J^1 \to J^2 \quad \text{und} \quad g\mathcal{O} \to \mathcal{O}$$

benannt. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^1 & \cdot g_x^2 \cong & g\mathcal{O} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ J^2 & \cdot g_x^2 \cong & \mathcal{O} \end{array}$$

gilt, daß die Prägarben J^2/J^1 und $\mathcal{O}/g\mathcal{O}$ isomorph sind. Die korrespondierende Cohomologiesequenz

$$H^0(X,J^2) \xrightarrow{\beta} H^0(X, \mathcal{O}/g\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,J^1)$$

ist exakt. Die Garben $J^1{}_t := J^1 | X_t$ und $\mathcal{O}_{-D_1} | X_t$

sind auf allen Fasern X_t isomorph. Es gilt

$$\dim H^1(X_t,J^1{}_t) = \dim (X_t,\mathcal{O}_{-D_1|X_t}) = 0$$

für $t \in M$, denn der Grad von $-D_1 \mid X_t$ ist negativ genug. J^1 ist π-platt und folglich die 1. direkte Bildgarbe $\pi_1(J^1)$ lokal frei. Ebenso aus Satz 1 erhält man die Gleichung

$$\pi_1(J^1)_t = (\pi^1(J^1) \cdot m(t))_t ,$$

wobei m(t) die maximale Idealgarbe von {t} in M bedeutet. Mit Hilfe des Lemmas von Nakayama (vgl. [15], chapt.IV, prop.1) und des Satzes 5 in [8], §2, ergibt sich (M ist Steinsch!):

$$\pi_1(J^1) = 0 \quad \text{und} \quad H^1(X,J^1) = 0,$$

d.h. der Homomorphismus β ist surjektiv. Sei $h \in H^0(X,J^2)$ so gewählt, daß $\beta(h) = 1 + g\mathcal{O}$ gilt. Dann ist $g_x^2 \cdot h_x$ ein holomorpher Keim in $x \in X$, der im Punkt x nicht verschwindet. Demnach ist h holomorph auf X - D und strebt gegen Unendlich auf allen gegen x konvergierenden Punktfolgen aus X - D. Diese Tatsache besteht für jedes $x \in X$; das bedeutet, daß X - D holomorph-konvex ist. Damit ist der Beweis erbracht. In ihn gingen Ideen aus [6], Fußnote 9 und [7], 2.3., ein.

Sei Y ein Gebiet in der komplexen Mannigfaltigkeit X. Wir erklären auf der Menge $\mathcal{M}(Y)$ der in Y meromorphen Funktionen eine Topologie τ .

Definition 6: $U \subset \mathcal{M}(Y)$ heißt Umgebung der meromorphen Funktion $f : Y \to \bar{\mathbb{C}}$, wenn es eine kompakte Teilmenge K in $H_f := \{x \in Y \mid f \text{ in } x \text{ holomorph}\}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt der-

art, daß

$$V_f(K,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{M}(Y) : H_g \supset K \text{ und } \|f-g\|_K < \varepsilon\}$$

in U enthalten ist.

Bemerkung: Die offenen Umgebungen $V_f(K,\varepsilon)$ mit kompaktem K aus H_f und reellem $\varepsilon > 0$ bilden eine offene Umgebungsbasis von f. Mit

$$\bigcup_{f \in \mathcal{M}(Y)} \left(\bigcup_{\substack{K \subset H_f \\ \varepsilon > 0}} V_f(K,\varepsilon) \right)$$

hat man die Basis einer Topologie τ auf $\mathcal{M}(Y)$ angegeben. τ ist eine Hausdorffsche Topologie.

Satz 6: Sei Y ein offener Teil von X. Die folgenden Aussagen sind äquivalent (vgl. [20], Satz 1.1)

(1) Y ist $\mathcal{M}(Y)$-konvex und $\mathcal{M}(X)|Y$ liegt bezüglich τ dicht in $\mathcal{M}(Y)$.

(2) Für kompakte Teilmengen K von Y gilt:

$$K(\mathcal{M}(Y),Y) = K(\mathcal{M}(X),X).$$

(3) Y ist $\mathcal{M}(X)$-konvex.

Beweis: Aus (1) folgt (2): Sei K eine kompakte Teilmenge von Y. Da $\mathcal{M}(X)|Y$ in $\mathcal{M}(Y)$ enthalten ist, liegt $K(\mathcal{M}(Y),Y)$ in $K(\mathcal{M}(X),Y)$, und damit auch in $K(\mathcal{M}(X),X)$. Sei x ein Punkt von Y, der nicht zu $K(\mathcal{M}(Y),Y)$ gehört. Es gibt eine Funktion f aus $\mathcal{M}(Y;K \cup \{x\})$, die die Eigenschaft

$$|f(x)| > \|f\|_K$$

erfüllt. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz einer Funktion F von $\mathcal{M}(X;K \cup \{x\})$ mit

$$|F(x)| > \|F\|_K .$$

Also hat man $x \notin K(\mathcal{M}(X),Y)$, und bisher den Nachweis der Gleichung

$$K(\mathcal{M}(Y),Y) = K(\mathcal{M}(X),Y).$$

Zum vollständigen Beweis der Behauptung bleibt zu zeigen, daß

$$Z := K(\mathcal{M}(X),X) - K(\mathcal{M}(X),Y)$$

eine leere Menge darstellt. Wäre dies nicht der Fall, dann läge Z in einer anderen Zusammenhangskomponente von $K(\mathcal{M}(X),X)$ als $K(\mathcal{M}(X),Y)$, weil $K(\mathcal{M}(X),Y)$ als Spur der offenen Menge Y einen offenen und - da identisch mit der nach Voraussetzung kompakten Menge $K(\mathcal{M}(Y),Y)$ - abgeschlossenen Teil von $K(\mathcal{M}(X),X)$ bildet. Dies würde bedeuten, daß die holomorphe Funktion $g: K(\mathcal{M}(X),X) \to \mathbb{C}$, die auf $K(\mathcal{M}(X),Y)$ durch die Konstante 0 und auf Z durch die Konstante 1 erklärt werde, nach Satz 2 approximiert werden kann durch eine meromorphe Funktion G aus $\mathcal{M}(X;K(\mathcal{M}(X),X))$, die der Ungleichung

$$\|G\|_Z > \|G\|_K$$

genügt. Das ist ein Widerspruch zur Definition der meromorphkonvexen Hülle $K(\mathcal{M}(X),X)$ von K in X. Also ist Z leer und $K(\mathcal{M}(X),X)$ stimmt mit $K(\mathcal{M}(X),Y) = K(\mathcal{M}(Y),Y)$ überein.

Aus 2) folgt 3): Wieder sei K ein kompakter Teil von Y. Weil die Basismannigfaltigkeit M Steinsch und π eigentlich ist, müssen die $\mathcal{O}(M)$-konvexe Hülle $\pi(K)(\mathcal{O}(M),M)$ der kompakten Menge $\pi(K)$ und das Urbild $H := \pi^{-1}(\pi(K)(\mathcal{O}(M),M))$ kompakt sein. Die abgeschlossene Menge $K(\mathcal{M}(X),X)$ liegt in H und ist deshalb kompakt. Nach Voraussetzung liegt sie auch in Y und stimmt demnach mit $K(\mathcal{M}(X),Y)$ überein. Also ist für alle kompakten Teilmengen K von Y die meromorphkonvexe Hülle $K(\mathcal{M}(X),Y)$ kompakt, d.h. Y ist $\mathcal{M}(X)$-konvex.

Aus 3) folgt 1): K bezeichne eine kompakte Menge in Y. Die meromorph-konvexe Hülle $K(\mathcal{M}(Y),Y)$ von K in Y liegt abgeschlossen in der nach Voraussetzung kompakten Menge $K(\mathcal{M}(X),Y)$, ist somit kompakt: Y ist $\mathcal{M}(Y)$-konvex.

Sei $f: Y \to \bar{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, L ein kompakter Teil der Menge O_f der Punkte von Y, in denen f holomorph ist, und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Ohne Einschränkung können wir L so wählen, daß sein offener Kern nicht leer ist. Die nach Voraussetzung kompakte Menge $L(\mathcal{M}(X),Y)$ liegt offen und abgeschlossen in der meromorph-konvexen Hülle $L(\mathcal{M}(X),X)$ von L. Sollten $L(\mathcal{M}(X),Y)$ und $L(\mathcal{M}(X),X)$ verschieden sein, könnte man wie im ersten Abschnitt dieses Beweises mit Hilfe von Satz 2 einen Widerspruch konstruieren. Folglich gilt

$$L \subset L(\mathcal{M}(X),Y) = L(\mathcal{M}(X),X) \subset Y.$$

Um zu zeigen, daß es zu ε eine meromorphe Funktion F aus $\mathcal{M}(X;L)$ gibt mit

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in L,$$

schließen wir uns zunächst dem Beweis von Satz 2 an. Der dort unter Nummer 1 behandelte Fall lautet mit den hier verwendeten Bezeichnungen:

$$L(\mathcal{M}(X),Y) = \pi^{-1}(\pi(L(\mathcal{M}(X),Y))).$$

Mit dem in der Bemerkung zu Definition 5 verwendeten Argument kann man hier folgern, daß f in $L(\mathcal{M}(X),Y)$ keine Polstellen, höchstens Unbestimmtheitsstellen besitzt. Diese Unbestimmtheitsstellen dürfen nur auf dem Rand von $L(\mathcal{M}(X),Y)$ vorkommen, weil in jeder Umgebung von Unbestimmtheitsstellen Pole liegen. Der offene Kern von $L(\mathcal{M}(X),Y)$, der ohne Einschränkung nicht leer ist, reproduziert sich unter $\pi^{-1} \cdot \pi$. Das bedeutet, daß die vorgegebene meromorphe Funktion f auf allen Fasern X_s, $s \in \pi(L(\mathcal{M}(X),Y))$, konstant ist. Genauso wie im Beweis zu Satz 2 erkennen wir die Existenz einer meromorphen Funktion $F \in \mathcal{M}(X;L)$, die die Ungleichung

$$\|F - f\|_L < \varepsilon$$

befriedigt.

Sei jetzt $L(\mathcal{M}(X),Y) \neq \pi^{-1}(\pi(L(\mathcal{M}(X),Y)))$. Entsprechend dem unter Nummer 2 im Beweis von Satz 2 behandelten Fall gibt es in Y eine offene Umgebung V von $L(\mathcal{M}(X),Y)$, eine natürliche Zahl t und eine injektive eigentliche holomorphe Abbildung $w : V \to \Delta^t(0;1)$, die durch die Beschränkung meromorpher Funktionen $m_1,\ldots,m_t \in \mathcal{M}(X;V)$ auf V erklärt ist. Die gemäß Remmert analytische Menge w(V) ist ein Steinscher

komplexer Raum, weil die $\mathcal{O}(w(V))$-konvexe Hülle eines kompakten Teils K von w(V) abgeschlossen im Kompaktum

$$\{z \in \Delta^t(0;1) : \|z\| \leq \max_{x \in K} \{|x|\} \}$$

liegt (dabei sei $\|z\| = \|(z_1,\ldots,z_t)\| = |z_1| + \ldots + |z_t|$), und deshalb selbst kompakt ist. In jeder Zusammenhangskomponente von w(V), die natürlich auch Steinsch ist, und folglich auch in ganz w(V) läßt sich die meromorphe Funktion $f \cdot w^{-1} : w(V) \to \bar{\mathbb{C}}$ nach Serre (siehe [18], S.63) schreiben als Quotient zweier holomorpher Funktionen. Nach Cartan gibt es holomorphe Fortsetzungen $h_1, h_2 : \Delta^t(0;1) \to \mathbb{C}$ der "Zähler-" und "Nennerfunktion". Die in $\Delta^t(0;1)$ meromorphe Funktion h_1 / h_2 kann sogar als Quotient von zwei relativ primen holomorphen Funktionen $H_1, H_2 : \Delta^t(0;1) \to \mathbb{C}$ dargestellt werden; denn $\Delta^t(0;1)$ ist zusammenhängende Steinsche komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^2(\Delta^t(0;1), \mathbb{Z}) = 0$ ([10],chapt.VIII,B,Prop.13). Wie im Beweis zu Satz 2 gibt es zu jedem $\delta > 0$ meromorphe Funktionen G_1 und G_2 aus $\mathcal{M}(X;L(\mathcal{M}(X),Y))$ mit

$$\|G_i - H_i \cdot w\|_{L(\mathcal{M}(X),Y)} < \delta, \quad i = 1,2.$$

$(H_2 \cdot w)$ verschwindet nach dem bisher Bewiesenen nicht auf L. Stellen wir an δ die erste Bedingung, daß

$$\delta < \frac{1}{2} \min_{x \in L} \{|H_2(w(x))|\}$$

gilt, dann ist auch G_2 nirgends Null in L. Die zweite Bedingung für δ ist

$$\delta < \frac{\frac{1}{2}\left(\min_{x\in L}\{|H_2(w(x))|\}\right)^2}{\|H_1\cdot w\|_L + \|H_2\cdot w\|_L}\,\varepsilon .$$

Dann gilt für $F := G_1 / G_2 \in \mathcal{M}(X;L)$

$$\|F - f\|_L = \left\| \frac{G_1}{G_2} - \frac{H_1\cdot w}{H_2\cdot w} \right\|_L = \left\| \frac{G_1(H_2\cdot w) - G_2(H_1\cdot w)}{G_2(H_2\cdot w)} \right\|_L \leq$$

$$\leq \left\| \frac{(H_2\cdot w)\,(G_1-(H_1\cdot w)) - (H_1\cdot w)(G_2-(H_2\cdot w))}{G_2(H_2\cdot w)} \right\|_L \leq$$

$$\leq \frac{\|H_2\cdot w\|_L\,\delta + \|H_1\cdot w\|_L\,\delta}{\frac{1}{2}\left(\min_{x\in L}\{|H_2(w(x))|\}\right)^2} < \varepsilon ,$$

womit Satz 6 bewiesen ist.

V. LITERATUR

[1] BEHNKE,H. und STEIN,K.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math.Ann. 120, 1947/49, 430-461.

[2] BEHNKE,H. und STEIN,K.: Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Canad.J.of Math. 2, 1950, 152-165.

[3] BEHNKE,K. und THULLEN,P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergebn. d.Math.u.i.Grenzgeb. III,3,Springer, Berlin 1934.

[4] BOURBAKI,N.: Algèbre commutative, Hermann, Paris 1961.

[5] CARTAN,H.: Séminaire 1951/52, École Normale Supérieure, Paris.

[6] CARTAN,H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie, Coll.sur les fonct. de plus. var., Brüssel 1953.

[7] GRAUERT,H.: On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann.of Math. 68, 1958, 460-472.

[8] GRAUERT,H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Publ.Math. I.H.E.S. 5, 1960.

[9] GROTHENDIECK,A. und DIEUDONNÉ,J.: Éléments de Géométrie Algébrique, Publ.Math. I.H.E.S. 4, 1960.

[10] GUNNING,R.C. und ROSSI,H.: Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1965.

[11] HIRZEBRUCH,F.: Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergebn.d.Math.u.i. Grenzgeb. 9, 2.ergänzte Aufl., Springer 1962.

[12] KODAIRA,K. und SPENCER,D.C.: On deformations of complex analytic structures, I und II, Ann.of Math. 67, 1958, 328-466.

[13] KODAIRA,K. und SPENCER,D.C.: On deformations of complex analytic structures, III. Stability theorems for complex structures, Ann.of Math. 71, 1960, 43-76.

[14] KURANISHI,M.: A note on families of complex structures in global analysis. Papers in honor of K.Kodaira. Tokyo und Princeton 1969.

[15] NORTHCOTT,D.G.: Ideal Theory. Cambridge Tracts in Math. a.Math.Phys. 42, Cambridge Univ. Press 1965

[16] REMMERT,R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math.Ann. 133, 1957, 328-370.

[17] RIEMENSCHNEIDER,O.: Über die Anwendung algebraischer Methoden in der Deformationstheorie komplexer Räume, Math.Ann. 187, 1970, 40-55.

[18] SERRE,J.P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll.sur les fonct. de plus. var., Brüssel 1953, 57-68.

[19] STEIN,K.: Über die Äquivalenz meromorpher und rationaler Funktionen, Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, Sonderdruck 9 aus d. Sitzungsber. 1966, 87-99.

[20] STEIN,K.: Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume, Archiv d.Math. 7, 1956,354-361.

LEBENSLAUF

1944 am 18. September in Prien am Chiemsee geboren als Sohn des Chemikers Herbert Correll und seiner Frau Toni, geb. Graul.

1963 Reifeprüfung am Neuen Realgymnasium München.

63/64 Zwei Semester Physikstudium an der Technischen Hochschule München.

64/69 Zehn Semester Mathematik-, Physik- und Pädagogikstudium an der Ludwig-Maximilians-Universität München.
Besuch von Vorlesungen bzw. Seminaren in Mathematik bei
O.Forster, G.Hämmerlin, H.Kerner, M.Koecher, K.-J.Ramspott, H.Richter, G.J.Rieger, K.Schütte, K.Seebach, K.Stein, E.Wienholtz.

1969 wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik.

1970 Teilnahme am Projekt Schullaufbahnberatung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus.

1971 Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.